Übung 2

Abgabe bis Donnerstag, 9.11., 11:45 Uhr

Aufgabe 1: [Landausche Symbole]

Es seien $f,\, g\colon X \subset \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von X ($x_0 = \infty$ sei zugelassen). Die *Landauschen Symbole* $\mathrm{O}(\cdot)$ und $\mathrm{o}(\cdot)$ seien folgendermaßen definiert:

$$f = \mathrm{O}(g) \text{ falls } \limsup_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty, \qquad f = \mathrm{o}(g) \text{ falls } \lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0.$$

Beachten sie, dass das Gleichheitszeichen hier symbolischer Natur und keine Äquivalenzrelation ist. Bearbeiten sie damit die folgenden Aufgaben.

(a) Es seien $h_1 = \mathrm{O}(f)$, $h_2 = \mathrm{O}(g)$, $h_3 = \mathrm{o}(f)$, für $x \to x_0$ und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen sie die Gültigkeit folgender Regeln:

  (i) $h_1 + h_2 = \mathrm{O}(|f| + |g|)$.

  (ii) $c \cdot h_1 + h_3 = \mathrm{O}(f)$.

  (iii) $h_2 \cdot h_3 = \mathrm{o}(f \cdot g)$.

(b) Beweisen oder widerlegen sie folgende Aussagen:

  (i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\quad f = \mathrm{O}(x^{k+1}) \iff f = \mathrm{o}(x^k)$, falls $x \to 0$.

  (ii) $f = \mathrm{O}(n^n) \iff f = \mathrm{O}(n!)$, falls $n \to \infty$.

  (iii) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, falls $(n \to \infty)$.

Punkte: $\boxed{12}$

Aufgabe 2: [Kondition]

Es sei $x = (x_1, x_2)^T$. Bestimmen sie κ_1^{abs} und κ_1^{rel} für die folgenden Funktionen f und überprüfen sie, für welche $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ die Auswertung der Funktion qualitativ gut bzw. schlecht konditioniert ist. Verwenden sie als Norm die Summennorm $||(x_1, x_2)|| = |x_1| + |x_2|$.

$$f(x) = \sqrt{x_1 + x_2}, \qquad x_1 + x_2 \geq 0,$$
$$f(x) = \sqrt{x_1 x_2}, \qquad x_1, x_2 \geq 0.$$

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 3: [Lagrange-Polynome]

Zeigen sie für die Lagrange-Polynome

$$L_i(x) = \prod_{k=0,k\neq i}^{i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$, dass

(a) für $c_i := L_i(0)$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x_i^j = \begin{cases} 1 & \text{für } j = 0, \\ 0 & \text{für } j = 1, 2, \ldots, n, \\ (-1)^n x_0 x_1 \ldots x_n & \text{für } j = n + 1. \end{cases}$$

(b)

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$$

Punkte: $\boxed{8}$

Aufgabe 4: [Programmieraufgabe]

Eine natürliche Zahl Z lässt sich für N Stellen und Basis b darstellen als

$$Z = \sum_{i=0}^{N-1} d_i b^i \hat{=} d_{N-1} d_{N-2} \ldots d_0 \quad \text{für} \quad d_i \in \{0, 1, \ldots, b - 1\}.$$

Schreiben Sie in Scilab oder MATLAB eine Funktion *basiswechsel(d,b,c)*, welche eine natürliche Zahl in einer vorgegebenen Basis in eine andere Basis transformiert. Inputparameter sind also ein Vektor $d = (d_{N-1}, d_{N-2}, \ldots, d_0)$, welcher einer natrürlichen Zahl in der Basis b entspricht, sowie eine weitere Basis c, in welche diese Zahl transformiert werden soll. Output der Funktion ist ein Vektor e, welcher der vorgegebenen Zahl in der neuen Basis c entspricht.
Bestimmen Sie mit Ihrer Funktion die Darstellung der Zahl $d = (4, 2, 6, 1, 3, 4, 3, 4, 4)$ mit Basis $b = 7$ in der neuen Basis $c = 4$.

Punkte: $\boxed{8}$

Gesamtpunktzahl: 34 Punkte