GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Stochastische Numerik
SS 2017
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 6

Abgabe bis Donnerstag, 13.7.2017

Aufgabe 1: Gegeben sei die skalare stochastische Differentialgleichung

$$X_{mh} = \xi + \int_0^{mh} f(X_s)\, ds + \int_0^{mh} g(X_s)\, dW_s \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für $mh \in [0,T]$, $m = \{0,1,\dots,M\}$ und $h = \frac{T}{M}$, $M \in \mathbb{N}$ wobei die Koeffizienten global Lipschitz-stetig sind. Zeigen Sie, dass das stochastische Euler-Verfahren Y_m, $m = \{0,1,\dots,M\}$, $M \in \mathbb{N}$, mit starker Ordnung $\frac{1}{2}$ konvergiert. Verwenden Sie dabei das Gronwall-Lemma:

Sei $M \in \mathbb{N}$ und $a \in [0,\infty)$. Sei zusätzlich $b_0, b_1, \dots, b_{M-1} \in [0,\infty)$ und $e_0, e_1, \dots, b_M \in [0,\infty)$ so dass

$$e_k \leq a + \sum_{l=0}^{k-1} e_l b_l$$

für alle $k \in \{0,1,\dots,M\}$. Dann gilt

$$e_k \leq a \cdot \prod_{l=0}^{k-1} (1 + b_l) \leq a \cdot e^{\left(\sum_{l=0}^{k-1} b_l\right)}$$

für alle $k \in \{0,1,\dots,M\}$.

Aufgabe 2: Sei $\{W_t, t \geq 0\}$ ein Wiener Prozess. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} f \ \mathrm{d}W_t\right)\left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} g \ \mathrm{d}W_t\right)\right] = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{E}\left[fg\right] \ \mathrm{d}t,$$

mit Hilfe von $4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$.