GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Computational Finance
SS 2017
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 11

Abgabe bis Freitag, 14.7.

Aufgabe 1: [Black-Scholes PDE]

Die Black-Scholes PDE sei mittels der Substitutionen $S = Ke^x$ und $t = T - \frac{\tau}{\sigma^2/2}$ im Gebiet $[0, \sigma^2 T/2] \times (-\infty, \infty)$ in die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

transformiert, um den Optionspreis $v(x, \tau) = V(S, t)$ zu bestimmen.

(a) Zeigen Sie, dass für $q = 2r/\sigma^2$ gilt:

$$y(x, \tau) = \frac{1}{K} e^{(q-1)x/2 + ((q-1)^2/4+q)\tau} v(x, \tau).$$

(b) Leiten Sie daraus die Anfangsbedingung und Randbedingungen für einen Europäischen Put her

Punkte: $\boxed{12}$

Aufgabe 2: [Konsistenzordnung]

(a) Über einem Gebiet $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei ein äquidistantes Gitter gelegt mit Gitterpunkten (x_i, τ_j) und Maschenweite Δx und $\Delta \tau$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\frac{\partial^2 y(x_i, \tau_j)}{\partial x^2} = \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2),$$

diese Diskretisierung der zweiten Ableitung also von zweiter Ordnung ist.

(b) Die Funktion $y(x, \tau)$ löse die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

und sei genügend glatt. Mit den Differenzenquotienten

$$D_x^2 y_{ij} = \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad \text{und} \quad D_\tau y_{ij} = \frac{y_{i,j+1} - y_{ij}}{\Delta \tau}$$

lautet der lokale Abbrechfehler ϵ beim Crank-Nicolson-Verfahren

$$\epsilon = D_\tau y_{ij} - \frac{1}{2}(D_x^2 y_{ij} + D_x^2 y_{i,j+1}).$$

Zeigen Sie:

$$\epsilon = O(\Delta \tau^2) + O(\Delta x^2).$$

Punkte: $\boxed{12}$

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte