GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Computational Finance
SS 2017
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 9

Abgabe bis Freitag, 30.6.

Aufgabe 1:

Gegeben sei das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$$

(a) Schätzen Sie das Integral durch Quasi-Monte Carlo-Integration mit den ersten 8 Werten der Van der Corput Folge zur Basis 4.

(b) Ermitteln Sie den Quadraturfehler und schätzen Sie ab, wie viele Folgenglieder benötigt werden, damit der absolute Fehler kleiner als $5 \cdot 10^{-7}$ wird, unter der Annahme, dass das Quasi-Monte Carlo Verfahren für dieses Integral mit Konvergenzrate $\frac{4}{5}$ konvergiert.

Punkte: $\boxed{8}$

Aufgabe 2:

Die Stern-Diskrepanz eines Punktevektors X ist definiert als

$$D_N^*(X) := \sup_{Q^* \subseteq [0,1]^d} \left| \frac{\#\{i \mid x_i \in Q^*\}}{N} - \operatorname{vol}(Q^*) \right|,$$

wobei Q^* ein Quader ist, der im Nullpunkt verankert ist, das heißt $Q^* = [0, b_1] \times \cdots \times [0, b_d]$ für $b_i \in (0, 1]$, $i = 1, \ldots, d$.

(a) Verteilen Sie 2 Punkte x_1, x_2 auf das Intervall $[0, 1]$ so, dass die Stern-Diskrepanz für $d = 1$ minimal wird.

(b) Bestimmen Sie die Stern-Diskrepanz von $X = \left\{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})\right\}$ für $d = 2$.

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 3: [Ruinproblem]

Das klassische Ruinproblem basiert auf einer unabhängigen Folge von Zufallsvariablen V_t, die jeweils die Verteilung

$$P(\{V_t = 1\}) = p, \quad P(\{V_t = -1\}) = 1 - p$$

mit $p \in \,]0,1[$ besitzen und angeben, ob ein Spieler in Runde t gewinnt oder verliert. Setzt der Spieler pro Runde den Einsatz eins und bezeichnet $n \in \mathbb{N}$ sein Startkapital, so ist

$$X_t = x + \sum_{s=1}^{t} V_s$$

sein Kapital nach t Runden. Wenn $z \in \mathbb{N}$ mit $z > x$ das angestrebte Zeil des Spielers ist, so lässt sich das Spielende durch die Eintrittszeit

$$T = \inf \{t \in \mathbb{N} | X_t \in \{0, z\}\}$$

definieren.

Für $t, x \in \mathbb{N}$ sei $f(x,t) = P(\{T \leq t\} \cap \{X_T = z\})$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler mit Startkapital x bis zur Zeit t sein Zielkapital z erreicht hat.

(a) Beweisen Sie für $t \geq 2$ die Rekursionsformel

$$f(x,t) = p \cdot f(x+1, t-1) + (1-p) \cdot f(x-1, t-1).$$

(b) Entwickeln und implentieren Sie einen Algorithmus zur Berechnung und graphischen Darstellung der Funktion $x \to f(x,t)$.

Punkte: $\boxed{12}$

Gesamtpunktzahl: 26 Punkte