Übung 4

Abgabe bis Freitag, 19.05.2017.

Aufgabe 1: [Anfangs- und Randbedingungen im PDE-Ansatz]

Die Payofffunktionen einer Digitalen Call- und Put-Option ist gegeben durch

$$P_{Call}(S(T)) = \mathbf{1}_{\{S(T)>K\}}, \quad P_{Put}(S(T)) = \mathbf{1}_{\{S(T)<K\}}.$$

Bestimmen sie für beide Optionen die Anfangs- und Randbedingungen im Black-Scholes Modell für den PDE-Ansatz.

Punkte: $\boxed{8}$

Aufgabe 2: [Lösung der Wärmeleitungsgleichung]

Zeigen sie durch Einsetzen, dass

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) e^{-(x-y)^2/4kt} dy$$

die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ in } \Omega = [-\infty, \infty] \times [0, \infty]$$

für eine gegebene (entsprechend integrierbare) reelle Funktion u_0 löst.

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 3: [Amerikanische Optionen]

Ein Portfolio bestehe aus einem amerikanischen Put und dem zugehörigen Basiswert, also $\Pi := V_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Am}} + S$, wobei S einer geometrischen Brownschen Bewegung mit konstantem Drift μ und Volatilität σ genüge. S_f ist der Kontaktpunkt. Zeigen sie, dass

$$\mathrm{d}\Pi = \begin{cases} 0 & \text{für } S < S_f \\ \left(\frac{\partial V_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Am}}}{\partial S} + 1\right) \sigma S \mathrm{d}W + \mathcal{O}(\mathrm{d}t) & \text{für } S > S_f. \end{cases}$$

Begründen sie hieraus

$$\frac{\partial V_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Am}}}{\partial S}(S_f(t), t) = -1.$$

Punkte: $\boxed{8}$

Gesamtpunktzahl: 22 Punkte