



## Übung 3

Abgabe bis Freitag 12.05.2017

### Aufgabe 1: [Stochastische Differentialgleichung]

Betrachten sie die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = \mu t S(t) dt + \sigma S(t) dW_t.$$

Welche Verteilung (mit Erwartungswert und Varianz) besitzt  $S(T)$ ? (Achtung: Dies ist nicht der Black-Scholes Fall)

Punkte:

### Aufgabe 2:

Sei  $\{W_t, 0 \leq t < \infty\}$  ein Wiener Prozess. Zeigen sie mit Hilfe der Itô-Formel, dass:

- (a)  $X_t = \exp(W_t - \frac{1}{2}t)$  löst  $dX_t = X_t dW_t$ .
- (b)  $X_t = \exp(2W_t - t)$  löst  $dX_t = X_t dt + 2X_t dW_t$ .

Punkte:

### Aufgabe 3:

Sei  $\{W_t, 0 \leq t < \infty\}$  ein Wiener Prozess. Zeigen Sie mit Hilfe der Itô-Formel das

$$d(\cos(W_t)) = -\frac{1}{2} \cos(W_t) dt - \sin(W_t) dW_t$$

und

$$d(\sin(W_t)) = -\frac{1}{2} \sin(W_t) dt + \cos(W_t) dW_t$$

gilt.

Punkte:

### Aufgabe 4:

Sei  $\{W_t, 0 \leq t < \infty\}$  ein Wiener Prozess und sei

$$m_k(t) := \mathbb{E}(W_t^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Itô-Formel

$$m_k(t) = \frac{1}{2} k(k-1) \int_0^t m_{k-2}(s) ds$$

für  $k \geq 2$ .

Punkte:

**Aufgabe 5:**

Betrachten sie Zahlen  $u, d, p, \beta, \mu, \sigma, \Delta t, T$  und  $n$  mit

$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}, \beta = \frac{1}{2}(e^{-\mu\Delta t} + e^{(\mu+\sigma^2)\Delta t}), ud = 1, T = n\Delta t, p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}$$

und zeigen sie

- (a)  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} np(1-p) \left(\ln \frac{u}{d}\right)^2 = \sigma^2 T$
- (b)  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} n \left(p \ln \frac{u}{d} + \ln d\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$
- (c)  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2p-1}{\sqrt{\Delta t}} = \frac{2r - \sigma^2}{2\sigma}$

und damit, dass das Binomialmodell für diese Parameter für  $\Delta t \rightarrow 0$  gegen das Black-Scholes-Modell mit Drift  $\mu$  und Volatilität  $\sigma$  konvergiert.

**Hinweis:** Es ist hilfreich die Beziehungen

$$d = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}, u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

zu benutzen sowie am Anfang zu zeigen, dass  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p = \frac{1}{2}$  gilt.

Punkte: 12