



## Übung 1

Abgabe bis Donnerstag, 4.5.2017

### Aufgabe 1:

Sei  $X$  eine normal verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$ , also  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Zeigen Sie, dass  $\mathbb{E}\left((X - \mu)^{2k+1}\right) = 0$  und  $\mathbb{E}\left((X - \mu)^{2k}\right) = (2k - 1)!! \sigma^{2k}$  für alle  $k \in \{0, 1, \dots\}$  gilt.

**Hinweis:** Die Doppelfakultät  $n!!$  für  $n \in \mathbb{N}$  ist definiert als

$$n!! := \begin{cases} n \cdot (n - 2) \cdot (n - 4) \cdot \dots \cdot 2 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ n \cdot (n - 2) \cdot (n - 4) \cdot \dots \cdot 1 & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zusätzlich definiert man  $0!! = 1$  und  $(-1)!! = 1$ .

Punkte:

### Aufgabe 2: [Verschiebungssatz]

Sei  $X$  eine Zufallsvariable. Zeigen Sie dass  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$  gilt.

Punkte:

### Aufgabe 3: [Gleichung von Bienayme]

Seien  $X_1, \dots, X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , quadratisch integrierbare, paarweise unkorrelierte, reellwertige Zufallsvariablen. Zeigen Sie dass  $\text{Var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)$  gilt.

Punkte:

### Aufgabe 4: [Box-Muller Methode]

Seien  $U_1$  und  $U_2$  unabhängige und auf  $[0, 1]$  gleichverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die durch die Box-Muller Methode gemäß der Transformationen

$$\begin{aligned} N_1 &= \sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2), \\ N_2 &= \sqrt{-2 \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2) \end{aligned}$$

erzeugten Zufallsvariablen  $N_1$  und  $N_2$  unabhängig und  $N(0, 1)$  verteilt sind.

Punkte: