

# **Finanznumerik (Computational Finance)**

**Vorlesungsskript**

**Goethe-Universität Frankfurt**

**Sommersemester 2010**

Thomas Gerstner

8. Oktober 2011



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Finanzderivate</b>	<b>9</b>
2.1	Verzinsung . . . . .	9
2.2	Forwards und Futures . . . . .	13
2.3	Einfache Optionen . . . . .	15
2.3.1	Europäische Optionen . . . . .	15
2.3.2	Amerikanische Optionen . . . . .	16
2.4	Optionen mit speziellen Ausübungsrechten . . . . .	17
2.4.1	Bermuda-Optionen . . . . .	17
2.4.2	Cap-Optionen . . . . .	18
2.4.3	Shout-Optionen . . . . .	18
2.5	Pfadabhängige Optionen . . . . .	18
2.5.1	Lookback-Optionen . . . . .	18
2.5.2	Asiatische Optionen . . . . .	19
2.5.3	Barrier-Optionen . . . . .	20
2.6	Optionen mit speziellen Auszahlungen . . . . .	21
2.6.1	Digitale Optionen . . . . .	21
2.6.2	Forward-Start-Optionen . . . . .	21
2.7	Optionen auf mehrere Basiswerte . . . . .	21
2.7.1	Basket-Optionen . . . . .	22
2.7.2	Regenbogen-Optionen . . . . .	22
2.7.3	Outperformance Optionen . . . . .	22

2.8	Noch exotischere Optionen . . . . .	22
2.9	Greeks . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Marktmodelle</b>	<b>25</b>
3.1	Marktannahmen . . . . .	25
3.2	Stochastische Prozesse . . . . .	25
3.3	Grundlegende stochastische Prozesse . . . . .	26
3.4	Black-Scholes Modell . . . . .	30
3.5	Erweiterungen des Black-Scholes Modells . . . . .	32
3.5.1	Lokale Volatilität . . . . .	32
3.5.2	Sprung-Diffusions-Modelle . . . . .	33
3.5.3	Stochastische Volatilität . . . . .	33
3.5.4	Binomialmodell . . . . .	34
3.5.5	Mehrdimensionale Modelle . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Bewertungsverfahren</b>	<b>37</b>
4.1	PDE-Ansatz . . . . .	37
4.2	Martingal-Ansatz . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Geschlossene Bewertungsformeln</b>	<b>43</b>
5.1	Black-Scholes Formel . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Baumverfahren</b>	<b>49</b>
6.1	Binomialverfahren . . . . .	49
6.2	Erweiterungen der Binomialmethode . . . . .	52
6.2.1	Pfadabhängige Optionen . . . . .	52
6.3	Multinomialbäume . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Simulationsverfahren</b>	<b>55</b>
7.1	Pfaddiskretisierung . . . . .	55
7.1.1	Random Walk . . . . .	56
7.1.2	Brownsche Brücke . . . . .	56
7.1.3	Direkte Diskretisierung der SDE . . . . .	56

7.1.4	Generierung von normalverteilten Zufallszahlen . . . . .	57
7.2	Simulationsverfahren . . . . .	58
7.2.1	Monte Carlo Simulation . . . . .	58
7.2.2	Optionsbewertung mit Monte-Carlo Simulation . . . . .	60
7.2.3	Fehler der Monte Carlo Simulation . . . . .	62
7.2.4	Quasi-Monte Carlo Simulation . . . . .	64
7.2.5	Broadie-Glasserman Verfahren . . . . .	67
<b>8</b>	<b>PDE-basierte Verfahren</b>	<b>71</b>
8.1	Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	71
8.2	Diskretisierung . . . . .	72
8.2.1	Diskretisierungsgitter . . . . .	72
8.2.2	Ortsdiskretisierung . . . . .	73
8.2.3	Zeitdiskretisierung . . . . .	73
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>75</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Die Finanznumerik (engl. computational finance oder financial engineering) ist ein interdisziplinäres Feld, das

- Finanzmathematik,
- stochastische Methoden,
- numerische Algorithmen und
- Computersimulationen

einsetzt, um Anwendern in

- Banken,
- Versicherungen und
- anderen Finanzinstituten (z.B. Anlagefirmen, Börsenmakler)

mit

- dem täglichen Handel,
- Risikoabschätzungen und
- Investitionsentscheidungen

zu unterstützen. Ihr Ziel ist es möglichst genau das finanzielle Risiko abzuschätzen, das Finanzinstrumente generieren. Bereiche, in denen die finanznumerischen Techniken eingesetzt werden, sind:

- Investment-Banking und -Management,
- strategische Unternehmensplanung,
- Handel mit Wertpapieren und Derivaten und
- Risikomanagement.

Von besonderem Interesse sind dabei Finanzderivate, z.B. verschiedene Typen von Optionen. Der Preis dieser Derivate hängt von der zukünftigen Entwicklung von einem oder mehreren zugrundeliegenden Wertpapieren ab, z.B.

- Aktien (stocks),
- Aktienindizes (stock indices),
- Verzinsliche Wertpapiere (bonds),
- Wechselkurse (exchange rates) oder
- Rohstoffkurse (commodities).

Finanzderivate werden üblicherweise entweder an speziellen Terminbörsen oder direkt außerbörslich (over-the-counter) gehandelt. Ihr (mathematisch) fairer Preis ist eine wichtige Richtgröße für alle Marktteilnehmer.

Der typische Ansatz bei der Bewertung von Finanzderivaten startet mit einem Modell für die zukünftige Entwicklung der zugrunde liegenden Wertpapiere. Hier werden stochastische Differentialgleichungen verwendet, um die zufälligen Schwankungen der Kurse zu berücksichtigen. Unter diesen Marktannahmen können mit Techniken aus der stochastischen Analysis Darstellungen für (faire) Preise und Risiken bestimmt werden.

Diese Darstellungen sind meist

- (kontinuierliche) Erwartungswerte oder
- partielle Differential- oder Integralgleichungen.

In den allermeisten Fällen können keine geschlossenen oder einfach berechenbare Lösungsformeln für die Darstellungen angegeben werden. Daher werden numerische Verfahren zur Diskretisierung dieser Erwartungswerte bzw. der Differentialgleichungen, eingesetzt, z.B.

- Pfadsimulationsverfahren,
- Quadraturverfahren,
- Finite-Differenzen- oder Finite-Elemente-Verfahren oder
- Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme bzw. Ungleichungssysteme.

# Kapitel 2

## Finanzderivate

### 2.1 Verzinsung

Die Zinsrechnung beschäftigt sich mit mathematischen Verfahren zur Berechnung von Zinsen auf angelegte bzw. geliehene Geldbeträge.

**Definition 2.1.1 (Festverzinsliche Anlage)** *Der Wert  $B(t)$  einer festverzinslichen, risikofreien Anlage vom Betrag  $B(0)$  (z.B. in Euro) mit einem jährlichen Zinssatz von  $r$  (in %) beträgt nach  $t$  Jahren:*

- bei einmaliger Verzinsung pro Jahr:  $B_1(t) = B(0) \cdot (1 + r)^t$
- bei  $m$ -maliger Verzinsung pro Jahr:  $B_m(t) = B(0) \cdot (1 + \frac{r}{m})^{t \cdot m}$
- bei kontinuierlicher Verzinsung:

$$\begin{aligned} B_\infty(t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} B(0) \cdot (1 + \frac{r}{m})^{t \cdot m} \text{ (setze } a := \frac{m}{r} \text{)} \\ &= \lim_{a \cdot r \rightarrow \infty} B(0) \cdot (1 + \frac{1}{a})^{a \cdot r \cdot t} \\ &= B(0) \cdot \left( \lim_{a \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{a})^a \right)^{r \cdot t} \\ &= B(0) \cdot e^{rt} \end{aligned} \tag{2.1}$$

**Bemerkung:** Mit genau dieser Herleitung beschäftigte sich schon 1689 Jacob Bernoulli bei dem Studium zusammengesetzter Zinsen.

**Hinweis 1:** Im folgenden ist immer der aktuelle Zeitpunkt  $t = 0$  und der Endzeitpunkt einer Anlage wird mit  $t = T$  bezeichnet.

**Hinweis 2:** In der Praxis wird zur Bestimmung der Zinsperiode oft ein Jahr zu 360 Tagen und ein Monat zu 30 Tagen (1/12 Jahr) angesetzt.

**Beispiel 2.1.2** Sei  $B(0) = 100$ ,  $r = 0.1$ ,  $t = 1$ , dann ist bei

- einmaliger Verzinsung:  $B_1(1) = 100 \cdot 1.1 = 110.0$
- zweimaliger Verzinsung ( $m = 2$ ):  $B_2(1) = 100 \cdot 1.05 \cdot 1.05 = 110.25$
- kontinuierlicher Verzinsung:  $B_\infty(1) = 100 \cdot e^{0.1} \approx 110.517$

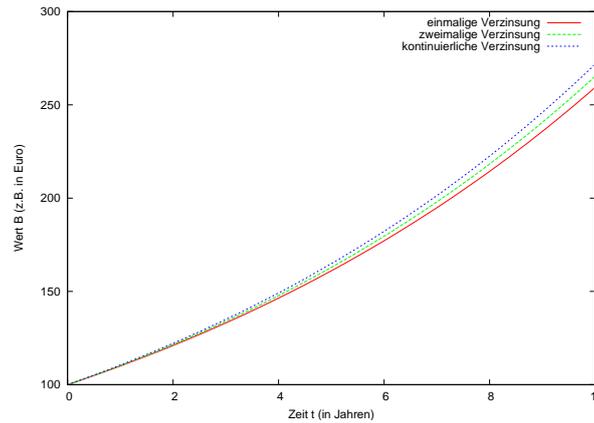


Abbildung 2.1: Einmalige, zweimalige und kontinuierliche Verzinsung für  $B(0) = 100$ ,  $r = 0.1$ ,  $t = 10$ .

Bei mehrfacher Verzinsung spricht man auch vom effektiven Jahreszins  $r_{\text{eff}}$ , der dem Jahreszins bei einmaliger Verzinsung entspricht. Man erhält den effektiven Jahreszins aus dem nominellen Jahreszins  $r$  durch

$$\begin{aligned} B(0) \cdot (1 + r_{\text{eff}})^t &= B(0) \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{t \cdot m} \\ r_{\text{eff}} &= \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bei kontinuierlicher Verzinsung gilt analog

$$\begin{aligned} B(0) \cdot (1 + r_{\text{eff}})^t &= B(0) \cdot e^{rt} \\ r_{\text{eff}} &= e^r - 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

**Beispiel 2.1.3** Für das Beispiel  $B(0) = 100$ ,  $r = 0.1$ ,  $t = 1$  gilt bei

- zweimaliger Verzinsung:  $r_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{0.1}{2}\right)^2 - 1 = 0.1025$
- kontinuierlicher Verzinsung:  $r_{\text{eff}} = e^{0.1} - 1 \approx 0.10517$

**Anmerkung 1:** Der Wert einer festverzinslichen Anlage  $B(t)$  erfüllt bei kontinuierlicher Verzinsung die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dB(t)}{dt} = rB(t). \quad (2.4)$$

Eine Diskretisierung der Differentialgleichung mit dem (expliziten) Euler-Verfahren mit Maschenweite  $h = t/n$  auf dem Gitter  $t_k = k \cdot h, k = 1 \dots n$ , führt zu:

$$B(t_{k+1}) = B(t_k) + h \cdot (r \cdot B(t_k)) = B(t_k) \cdot (1 + h \cdot r) = B(t_k) \cdot \left(1 + \frac{rt}{n}\right) \quad (2.5)$$

mit  $B(t_0) = B(0)$  und somit

$$B(t) = B(t_n) = B(0) \cdot \left(1 + \frac{rt}{n}\right)^n \quad (2.6)$$

Damit ist die  $m$ -fache Verzinsung nichts anderes als eine Euler-Diskretisierung der Differentialgleichung mit  $n = t \cdot m$  Zeitschritten. Die Differenz zwischen der  $m$ -fachen und der kontinuierlichen Verzinsung läßt sich damit als Diskretisierungsfehler angeben durch:

$$\begin{aligned} |B_\infty(t) - B_m(t)| &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{2} r^2 h^2 B(t_k) + O(h^3) \right) \\ &\approx n \cdot \left( \frac{1}{2} r^2 h^2 B(0) + O(h^3) \right) = \frac{r^2 t}{2m} B(0) + O(h^2) = O(m^{-1}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

**Beispiel 2.1.4** Für  $B(0) = 100$ ,  $r = 0.1$ ,  $t = 1$  und  $m = 2$  beträgt die Differenz laut Abschätzung:  $(100 \cdot 0.1^2)/(2 \cdot 2) = 0.25$  und die exakte Differenz  $110.517\dots - 110.25 = 0.267\dots$

**Anmerkung 2:** Der kontinuierliche Zins stellt eine logarithmische (Brutto-)rendite dar:

$$r = \ln \frac{B_\infty(t)}{B(0)} / t \quad (2.8)$$

**Anmerkung 3:** Die kontinuierliche Verzinsung ist additiv, d.h. bei einem Zinssatz von  $r_1$  im Zeitraum  $[0, t]$  und  $r_2$  im Zeitraum  $[t, 2t]$  gilt

$$B_\infty(2t) = B(0) \cdot e^{r_1 \cdot t} e^{r_2 \cdot t} = B(0) \cdot e^{(r_1 + r_2)t} \quad (2.9)$$

**Beispiel 2.1.5** Der Wert einer Anlage (z.B. Aktie) sinkt im ersten Jahr von  $B(0) = 100$  auf  $B(1) = 50$  und dann steigt sie im folgenden Jahr wieder auf  $B(2) = 100$ . Dann ist

- bei einmaliger Verzinsung: im ersten Jahr  $r_1 = -0.5$ , im zweiten Jahr  $r_2 = 1.0$  und der mittlere Zins somit  $(r_1 + r_2)/2 = 0.25$ .
- bei kontinuierlicher Verzinsung: ist im ersten Jahr  $r_1 = \ln(\frac{50}{100}) \approx -0.06931$ , im zweiten Jahr  $r_2 = \ln(\frac{100}{50}) \approx 0.06931$  und der mittlere Zins somit  $(r_1 + r_2)/2 = 0\%$ .

**Anmerkung 4:** Wählt man

$$B_m(t) = B(0) \cdot \prod_{i=1}^m (1+r)^{t/m}, \quad (2.10)$$

so ist der effektive Jahreszins der  $m$ -fachen Verzinsung gleich dem Zins der einfachen Verzinsung.

**Definition 2.1.6 (Variabel verzinsliche Anlage)** Bei einer variabel verzinslichen Anlage wird ein Betrag  $B(0)$  mit einem variablen Zinssatz  $r = r(t)$  verzinst und es gilt bei  $m$ -maliger Verzinsung pro Jahr:

$$B_m(t) = B(0) \cdot \prod_{i=0}^{tm-1} \left(1 + \frac{r_i}{m}\right) \quad (2.11)$$

mit  $t_i = i/m$  und  $r_i = r(t_i)$  bzw. bei kontinuierlicher Verzinsung mit

$$B_\infty(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} B(0) \cdot \prod_{i=0}^{tm-1} \left(1 + \frac{r_i}{m}\right) = B(0) \cdot e^{\int_0^t r(s) ds} \quad (2.12)$$

**Beispiel 2.1.7** Sei  $B(0) = 100, t = 1, r(t) = 0.1 + 0.1 \cdot t$ , dann ist

- bei einmaliger Verzinsung:  $B_1(1) = B(0)(1 + r(0)) = 100 \cdot 1.1 = 110$
- bei zweimaliger Verzinsung:  $B_2(1) = B(0)(1 + r(0)/2)(1 + r(0.5)/2) = 100 \cdot 1.05 \cdot 1.075 = 112.875$
- bei kontinuierlicher Verzinsung:  $B_\infty(1) = B(0)e^{\int_0^1 0.1+0.1s ds} = 100 \cdot e^{0.1+0.1/2} = 100 \cdot e^{0.15} = 116.1834\dots$

**Anmerkung 1:** Manchmal wird bei der  $m$ -maligen Verzinsung statt  $r(t_{i-1})$  auch  $r(t_i)$  oder ein Mittel wie  $r((t_i + t_{i+1})/2)$  bzw.  $\frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} r(s) ds$  gewählt.

**Anmerkung 2:** Die variable Verzinsung genügt der Differentialgleichung

$$\frac{dB(t)}{dt} = r(t)B(t), \quad (2.13)$$

mit zugehöriger Euler-Diskretisierung

$$B(t_{k+1}) = B(t_k) + h \cdot r_k \cdot B(t_k) = B(t_k) \cdot (1 + r_k t/n). \quad (2.14)$$

Dies entspricht einer Diskretisierung des Integrals im Exponenten der kontinuierlichen Verzinsung mit der Rechteckregel.

**Definition 2.1.8 (Diskontierung)** Unter Diskontierung (Abzinsung) versteht man genau den umgekehrten Vorgang der Verzinsung, d.h. die Bestimmung des jetzigen Werts  $B(0)$  eines zukünftigen Betrags  $B(t)$  unter dem Zinssatz  $r$ . Es gilt:

- bei  $m$ -maliger fester Verzinsung pro Jahr:  $B(0) = (1 + \frac{r}{m})^{-t \cdot m} \cdot B(t)$
- bei kontinuierlicher fester Verzinsung:  $B(0) = e^{-rt} \cdot B(t)$
- bei  $m$ -maliger variabler Verzinsung pro Jahr:  $B(0) = \prod_{i=0}^{tm-1} (1 + \frac{r_i}{m})^{-1} \cdot B(t)$
- bei kontinuierlicher variabler Verzinsung:  $B(0) = e^{-\int_0^t r(s) ds} \cdot B(t)$

## 2.2 Forwards und Futures

**Definition 2.2.1 (Forward)** Ein Forward ist ein Vertrag, einen Vermögenswert  $S$  zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt  $T$  zu einem bestimmten Preis  $K$  zu kaufen oder zu verkaufen. Zum Zeitpunkt  $T$  hat ein Forward den Wert  $V(S, T) = S(T) - K$  (Kaufposition) bzw.  $V(S, T) = K - S(T)$  (Verkaufsposition).

**Beispiel 2.2.2** Ein Forward auf eine Unze Gold zu  $K = 340$  (Euro) in einem Jahr ( $T = 1$ ) hat

- Preis der Unze Gold  $S(T) = 350$ : Wert des Forwards  $V(T) = 350 - 340 = 10$
- Preis der Unze Gold  $S(T) = 330$ : Wert des Forwards  $V(T) = 330 - 340 = -10$

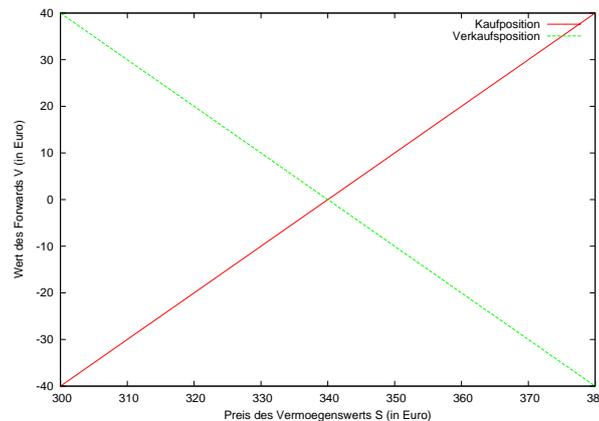


Abbildung 2.2: Wert eines Forwards auf  $S$  für den Preis  $K = 340$  zum Zeitpunkt  $T$  (jeweils Kauf- und Verkaufsposition).

Die Frage ist nun: was ist der Wert des Forwards nicht zum Zeitpunkt  $T$ , sondern zum jetzigen Zeitpunkt:  $V(S, 0)$ .

**Definition 2.2.3 (Arbitrage)** Arbitrage bezeichnet die Möglichkeit eines risikofreien Gewinns (z.B. die Preisdifferenz für das gleiche Wertpapier zwischen zwei Märkten). Arbitrageure im Markt nutzen diese Möglichkeiten aus und sorgen so langfristig für arbitrage-freie Märkte.

**Beispiel 2.2.4** Für  $S(0) = 300$  Euro,  $r = 5\%$ ,  $t = 1$  Jahr,  $K = 340$  Euro gibt es folgende Arbitragemöglichkeit:

- Investor leiht sich 300 Euro zu 5%
- er kauft eine Unze Gold
- er übernimmt die Verkaufsposition in einem 1-jährigen Forward zu 340 Euro

Resultierender Gewinn:  $340 - 300 \cdot e^{0.05} = 340 - 315.38 = 24,62$  Euro

Für andererseits  $S(0) = 300$  Euro,  $r = 5\%$ ,  $t = 1$  Jahr,  $K = 300$  Euro gibt es die Arbitragemöglichkeit:

- Investor verkauft eine Unze Gold
- Er legt 300 Euro zu 5% an
- er übernimmt die Kaufsposition in einem 1-jährigen Forward zu 300 Euro

Resultierender Gewinn:  $300 \cdot e^{0.05} - 300 = 315.38 - 300 = 15,38$  Euro

**Satz 2.2.5** In einem arbitragefreien Markt mit Zinssatz  $r$  muss für einen Forward-Vertrag auf das Wertpapier  $S$  zum Zeitpunkt  $t$  gelten:

$$K = S(0) \cdot e^{rt} \tag{2.15}$$

*Beweis:* Der resultierende Gewinn für einen der beiden obigen Investoren ist genau dann Null, falls  $K = S(0) \cdot e^{rt}$ . □

**Bemerkung:** Der Preis eines Forwards  $V$  ist dann zum momentanen Zeitpunkt immer 0, später kann er ungleich Null sein.

Futures sind an der Börse gehandelte Forward-Verträge.

## 2.3 Einfache Optionen

**Definition 2.3.1 (Option)** Eine Option ist ein Vertrag, der dem Halter das Recht, aber nicht die Pflicht gibt, einen Vermögenswert  $S(t)$  innerhalb des Zeitraums  $\tau$  zu einem bestimmten Preis  $K$  zu kaufen (Call Option) bzw. zu verkaufen (Put Option). Dieses Recht hat einen (zeitlich sich verändernden) Wert, der mit  $V(S, t)$  bezeichnet wird.

**Hinweis:** Der Wert einer Option zum Ende  $T$  des Ausübungszeitraums  $\tau$  ist in der Regel bekannt und wird Auszahlungsfunktion  $V(S, T)$  genannt.

### 2.3.1 Europäische Optionen

**Definition 2.3.2 (Europäische Option)** Bei sogenannten Europäischen Optionen ist der Ausübungszeitraum  $\tau = \{T\}$  nur ein Zeitpunkt in der Zukunft. Der Wert einer Europäischen Option zum Zeitpunkt  $T$  ist

$$V(S, T) = \max\{S(T) - K, 0\} = (S(T) - K)^+ \quad (2.16)$$

für Call Optionen und

$$V(S, T) = \max\{K - S(T), 0\} = (K - S(T))^+ \quad (2.17)$$

für Put Optionen.

Gesucht ist nun der Wert der Option zum jetzigen Zeitpunkt:  $V(S, 0)$ .

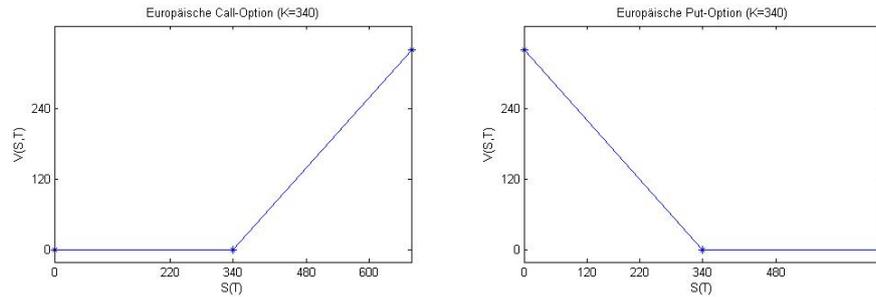
**Beispiel 2.3.3** für eine Call-Option: Kaufe eine Unze Gold zu 340 Euro bis zum 31. Januar 2012. Am 31. Januar 2012 ( $T$  ist die Zeitdifferenz zu heute) ist der Wert dieser Option z.B.

- falls  $S(T) = 360$  Euro:  $360 - 340 = 20$  Euro (der Halter übt die Option aus)
- falls  $S(T) = 300$  Euro: 0 Euro (der Halter übt die Option nicht aus)

**Satz 2.3.4 (Put-Call Parität)** Für Europäische Optionen gilt die Put-Call Parität

$$V_{Call}(S, t) + Ke^{-r(T-t)} = V_{Put}(S, t) + S(t). \quad (2.18)$$

*Beweis:* Sei  $B(t, T)$  der Wert eines festverzinslichen Wertpapiers zum Zeitpunkt  $t$ , das  $K$  zum Zeitpunkt  $T$  zahlt. Man betrachtet die beiden risikofreien Portfolios

Abbildung 2.3: Auszahlungsfunktion einer Call- bzw. Put-Option auf  $S$ .

- Portfolio A: 1 Call-Option + 1 Wertpapier  $B$ . Der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt  $T$  ist

$$V_{Call}(S, T) + B(T, T) = \begin{cases} K & \text{falls } S(T) \leq K \quad (\text{Option: } 0, \text{ Wertpapier: } K) \\ S(T) & \text{falls } S(T) \geq K \quad (\text{Option: } S(T) - K, \text{ Wertpapier: } K) \end{cases}$$

- Portfolio B: 1 Put-Option + 1 Basiswert  $S$ . Der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt  $T$  ist

$$V_{Put}(S, T) + S(T) = \begin{cases} K & \text{falls } S(T) \leq K \quad (\text{Option: } K - S(T), \text{ Basisw.: } S(T)) \\ S(T) & \text{falls } S(T) \geq K \quad (\text{Option: } 0, \text{ Basisw.: } S(T)) \end{cases}$$

Beide Portfolios haben zum Zeitpunkt  $T$  den gleichen Wert  $\max\{S(T), K\}$ . Das impliziert, dass sie auch den gleichen Wert zu jedem Zeitpunkt  $t < T$  haben müssen, ansonsten gäbe es Arbitrage-Möglichkeiten (man könnte das billigere kaufen und das teurere verkaufen, zum Zeitpunkt  $T$  hat deren Summe jedoch Wert 0, wodurch ein risikofreier Gewinn zum Zeitpunkt  $t$  entsteht).  $\square$

**Anmerkung:** Für einen festen Zinssatz  $r$  ist  $B(t, T) = e^{-r(T-t)}K$ .

Weiterhin gelten die Ungleichungen

$$S(t) \geq V_{Call}(S, t) \geq \max\{S(t) - K \cdot e^{-r(T-t)}, 0\} \quad (2.19)$$

$$K \geq V_{Put}(S, t) \geq \max\{K \cdot e^{-r(T-t)} - S(t), 0\} \quad (2.20)$$

### 2.3.2 Amerikanische Optionen

**Definition 2.3.5 (Amerikanische Option)** Bei sogenannten Amerikanischen Optionen ist der Ausübungszeitraum das ganze Zeitintervall  $\tau = [0, T]$  zwischen heute und dem Zeitpunkt  $T$ .

Für Amerikanische Optionen gilt keine Put-Call Parität, sondern nur

$$K e^{-r(T-t)} \leq S(t) + V_{Put}(S, t) - V_{Call}(S, t) \leq K \quad (2.21)$$

wobei die obere Schranke nur gilt, falls keine Dividende gezahlt werden. Desweiteren gelten nur die größeren Ungleichungen:

$$S(t) \geq V_{Call}(S, t) \geq 0 \quad (2.22)$$

$$K \geq V_{Put}(S, t) \geq 0 \quad (2.23)$$

Es kann auch gezeigt werden, dass der Wert Europäischer und Amerikanischer Call Optionen gleich ist, da es niemals optimal ist, eine Amerikanische Kaufoption vor dem Endzeitpunkt  $T$  auszuüben.

**Satz 2.3.6** *Zahlt das zugrunde liegende Wertpapier keine Dividenten aus, so ist es niemals optimal, eine Amerikanische Kaufoption vor dem Fälligkeitszeitpunkt auszuüben und es gilt für  $S > 0$  und  $t \in [0, T]$ :*

$$V^{eur}(S, t) = V^{am}(S, t) \quad (2.24)$$

*Beweis:* Da Amerikanische Optionen mehr Rechte als Europäische Optionen beinhalten, gilt  $V^{am}(S, t) \geq V^{eur}(S, t)$ . Da aber für eine Europäische Call-Option  $V^{eur}(S, t) \geq (S - Ke^{-r(T-t)})^+ \geq (S - K)^+$  gilt, lohnt sich vorzeitiges Ausüben der Option nicht.  $\square$

**Satz 2.3.7** *Für eine Amerikanische Verkaufsoption gibt es immer einen Aktienkurs  $S(t) > 0$ , so dass vorzeitiges Ausüben zum Zeitpunkt  $t < T$  optimal ist.*

*Beweis:* Die maximale Auszahlung einer Amerikanischen Verkaufsoption am Fälligkeitszeitpunkt  $T$  ist  $K$ . Ein Händler wird eine Amerikanische Verkaufsoption zum Zeitpunkt  $t$  vorzeitig ausüben, wenn die Auszahlung größer ist, als die maximale diskontierte Auszahlung am Fälligkeitszeitpunkt  $T$ , d.h. wenn  $K - S(t) > e^{-r(T-t)}K$ . Hinreichend für ein vorzeitiges Ausüben der Option ist also  $S(t) < (1 - e^{-r(T-t)})K$ .  $\square$

## 2.4 Optionen mit speziellen Ausübungsrechten

Bei den folgenden Optionen ist die Auszahlung wie bei den einfachen (Vanilla) Optionen, aber die Ausübungsrechte sind unterschiedlich.

### 2.4.1 Bermuda-Optionen

**Definition 2.4.1 (Bermuda-Option)** *Bei sogenannten Bermuda-Optionen ist der Ausübungszeitraum eine vorgegebene Zahl von Zeitpunkten  $\tau = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  mit  $t_i < t_j$  für  $1 \leq i < j \leq m$ ,  $t_1 \geq 0$  und  $t_m = T$ .*

Da bermudische Optionen bei gleichem Endzeitpunkt  $T$  mehr Rechte als europäische und weniger Rechte als amerikanische Optionen beinhalten, liegt ihr Preis zwischen diesen Optionstypen (die Bermuda-Inseln liegen auch zwischen Amerika und Europa).

## 2.4.2 Cap-Optionen

**Definition 2.4.2 (Cap-Option)** *Cap-Optionen werden automatisch ausgeübt, sobald der Vermögenswert eine vorgegebene Schranke  $H$  über- (bei Call Optionen) bzw. unterschreitet (bei Put Optionen).*

Cap-Optionen besitzen damit eine obere Schranke  $H - K$  bzw.  $K - H$  für den Gewinn.

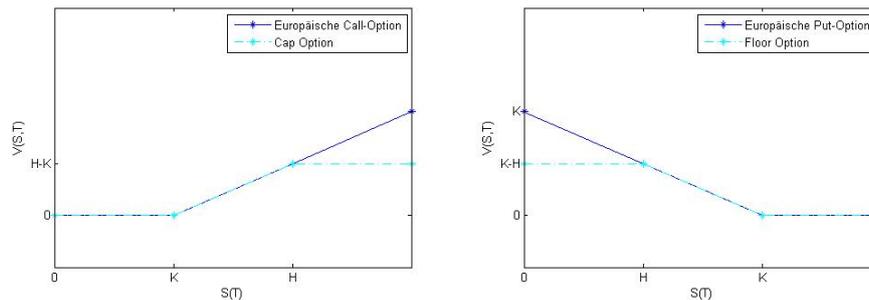


Abbildung 2.4: Vergleich einer europäischen Option mit einer Cap bzw. Floor Option.

## 2.4.3 Shout-Optionen

**Definition 2.4.3 (Shout-Option)** *Shout-Optionen geben dem Halter praktisch zwei Ausübungszeitpunkte. Zu einem beliebigen Zeitpunkt  $\bar{t} < T$  kann der Halter den aktuellen Preis  $S(\bar{t})$  festhalten (shouten) und erhält zum Ende des Ausübungszeitraums  $T$  bei einer Call-Option*

$$V(S, T) = \max\{(S(\bar{t}) - K)^+, (S(T) - K)^+\} \quad (2.25)$$

## 2.5 Pfadabhängige Optionen

Pfadabhängige Optionen sind spezielle (exotische) Optionen, bei denen zur Bestimmung der Auszahlung nicht nur der Preis des Basiswerts zum aktuellen Zeitpunkt, sondern die gesamte Preishistorie zugrunde gelegt wird.

### 2.5.1 Lookback-Optionen

**Definition 2.5.1 (Lookback-Option)** *Bei Lookback-Optionen wird zur Ermittlung der Auszahlung das Maximum oder Minimum der Kurse im Ausübungszeitraum betrachtet.*

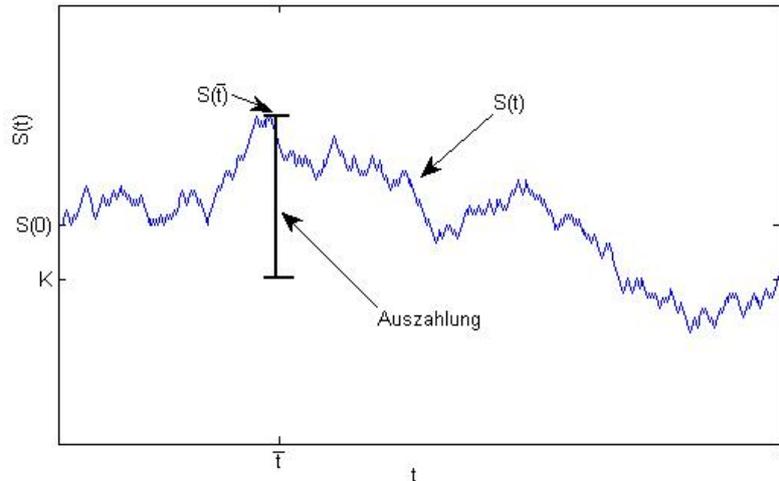


Abbildung 2.5: Darstellung der Auszahlung einer Shout-Option anhand der Kursentwicklung von  $S$ .

Man unterscheidet Lookback-Optionen mit festem und mit variablen Ausübungspreis:

$$V(S, T) = \left( \max_{0 \leq t \leq T} S(t) - K \right)^+ \quad (\text{fester Ausübungspreis}) \quad (2.26)$$

$$V(S, T) = \left( S(T) - \min_{0 \leq t \leq T} S(t) \right)^+ \quad (\text{variabler Ausübungspreis}) \quad (2.27)$$

Sogenannte Russische Optionen sind Lookback-Optionen die ewig, also ohne festen Ausübungszeitpunkt  $T$  laufen.

### 2.5.2 Asiatische Optionen

**Definition 2.5.2 (Asiatische Option)** Bei Asiatischen Optionen wird nicht der Wert des Vermögenswerts am Ende des Ausübungszeitpunkts sondern über sein zeitliches Mittel über einen vorgegebenen Zeitraum mit dem Ausübungspreis  $K$  verglichen. Man unterscheidet zwischen arithmetischen und geometrischen sowie diskreten und kontinuierlichen

Mitteln.

$$V(S, T) = \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i) - K \right)^+ \quad (\text{diskret arithmetisch}) \quad (2.28)$$

$$V(S, T) = \left( \left( \prod_{i=1}^m S(t_i) \right)^{1/m} - K \right)^+ \quad (\text{diskret geometrisch}) \quad (2.29)$$

$$V(S, T) = \left( \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt - K \right)^+ \quad (\text{kontinuierlich arithmetisch}) \quad (2.30)$$

$$V(S, T) = \left( e^{\frac{1}{T} \int_0^T \ln S(t) dt} - K \right)^+ \quad (\text{kontinuierlich geometrisch}) \quad (2.31)$$

Daneben gibt es ähnlich wie bei Lookback-Optionen Asiatische Optionen mit variablem Ausübungspreis, z.B. im diskreten arithmetischen Mittel

$$V(S, T) = \left( S(T) - \frac{1}{m} \sum_{i=0}^m S(t_i) \right)^+ \quad (\text{diskret arithmetisch}) \quad (2.32)$$

Asiatische Optionen haben ihren Ursprung in asiatischen Märkten, um Optionshändler davon abzuhalten, den Optionspreis am Ausübungstag zu manipulieren.

### 2.5.3 Barrier-Optionen

**Definition 2.5.3 (Barrier-Option)** Bei Barrier-Optionen hängt das Ausübungsrecht davon ab, ob der Vermögenswert eine vorgegebene Schranke  $H$  (Barrier) über- oder unterschreitet. Knock-Out Optionen werden wertlos, sobald die Schranke übertreten (Up-Out) oder unterschritten (Down-Out) wird. Knock-In-Optionen sind solange wertlos, bis die Schranke übertreten (Up-In) bzw. unterschritten (Down-In) wird. Als Beispiel hat eine Down-Out Call Option die Auszahlung:

$$V(S, T) = \begin{cases} (S(T) - K)^+ & \text{falls } S(t) > H \text{ für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.33)$$

Für Barrier-Optionen gilt die In-Out Parität, d.h. wenn man eine Knock-In- und eine Knock-Out-Option mit gleichem Barrier kombiniert, dann erhält man die entsprechende Europäische Option

$$V_{In}(S, t) + V_{Out}(S, t) = V_{Eur}(S, t) . \quad (2.34)$$

Neben den kontinuierlichen Barrier Optionen oben gibt es auch diskrete Barrier Optionen, bei denen die Schranke nur zu bestimmten Zeiten überprüft wird. Bei sogenannten Paris-Optionen muss die Schranke mindestens einen vorgegebenen Zeitraum über- bzw. unterschritten werden und die Auszahlung hängt von der Länge dieses Zeitraums ab.

## 2.6 Optionen mit speziellen Auszahlungen

### 2.6.1 Digitale Optionen

**Definition 2.6.1 (Digitale Option)** Bei digitalen (binären) Optionen wird unabhängig vom Preis des Basiswerts zum Ausübungszeitpunkt entweder der Preis des Wertpapiers  $S(T)$  (*asset-or-nothing*) oder ein fester Betrag  $B$  (*cash-or-nothing*) gezahlt, wenn der Preis des Basiswerts über dem Ausübungspreis liegt, die Auszahlung ist also

$$V(S, T) = \begin{cases} S(T) & \text{falls } S(T) > K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{asset-or-nothing}) \quad (2.35)$$

$$V(S, T) = \begin{cases} B & \text{falls } S(T) > K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{cash-or-nothing}) \quad (2.36)$$

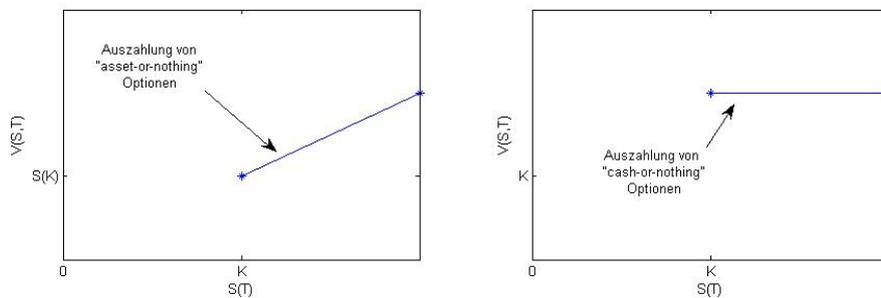


Abbildung 2.6: Auszahlungsfunktion von *asset-or-nothing* Optionen (links) und von *cash-or-nothing* Optionen (rechts)

### 2.6.2 Forward-Start-Optionen

**Definition 2.6.2 (Forward-Start-Option)** Bei *Forward-Start-Optionen* wird der Ausübungspreis  $K$  erst zu einem bestimmten Zeitpunkt  $\bar{t}$  in der Zukunft durch den dann gültigen Preis  $S(\bar{t})$  des Basiswerts bestimmt

$$V(S, T) = (S(T) - S(\bar{t}))^+ \quad (2.37)$$

## 2.7 Optionen auf mehrere Basiswerte

Bei Multi-Asset Optionen werden die Kursverläufe mehrerer Basiswerte  $S_1(t), S_2(t), \dots, S_k(t)$  betrachtet.

**Definition 2.7.1 (Spread-Option)** Bei *Spread-Optionen* wird die Differenz zweier Basiswerte  $S_1$  und  $S_2$  mit dem Ausübungspreis  $K$  verglichen, also bei *Call-Optionen*

$$V(S, T) = ((S_1(T) - S_2(T)) - K)^+ \quad (2.38)$$

### 2.7.1 Basket-Optionen

**Definition 2.7.2 (Basket-Option)** Bei Basket-Optionen hängt die Auszahlung von dem Wert eines Portfolios (oder Basket) von Basiswerten ab, z.B. auf einen Aktienindex wie den DAX

$$V(S, T) = \left( \sum_{i=1}^k a_i S_i(T) - K \right)^+ \quad (2.39)$$

### 2.7.2 Regenbogen-Optionen

**Definition 2.7.3 (Regenbogen-Option)** Bei Regenbogen-Optionen hängt die Auszahlung von dem besten oder dem schlechtesten Basiswert ab

$$V(S, T) = \left( \max_{i=1, \dots, k} S_i(T) - K \right)^+ \text{ (bester Wert)} \quad (2.40)$$

$$V(S, T) = \left( \min_{i=1, \dots, k} S_i(T) - K \right)^+ \text{ (schlechtester Wert)} \quad (2.41)$$

### 2.7.3 Outperformance Optionen

**Definition 2.7.4 (Outperformance-Option)** Bei Outperformance-Optionen hängt die Auszahlung von der Performance (dem relativen Wertzuwachs) eines Basiswerts  $S_1$  im Vergleich zu den anderen Basiswerten  $S_2, \dots, S_k$  ab.

$$V(S, T) = \begin{cases} (S_1(T) - K)^+ & \text{falls } \frac{S_1(T)}{S_1(0)} > \frac{S_i(T)}{S_i(0)} \text{ für } 2 \leq i \leq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.42)$$

## 2.8 Noch exotischere Optionen

- zusammengesetzte Optionen, also Optionen auf Optionen
- Re-Optionen, beinhalten für den Halter bei Ausübung eine weitere Option auf den Basiswert
- verlängerbare (extendible) Optionen, bei denen der Halter für einen festen Preis die Laufzeit der Option verlängern kann
- Chooser-Optionen, die den Halter für einen bestimmten Zeitraum entscheiden lassen, ob die Option eine Call oder Put Option sein soll
- Quanto-Optionen sind Optionen auf einen Basiswert, der in einer ausländischen Währung notiert wird, bei denen die Auszahlung aber in der einheimischen Währung gezahlt wird

## 2.9 Greeks

Die sogenannten Greeks (Griechen) sind die Ableitungen (Sensitivitäten) des Optionspreises  $V$  bezüglich der zugrunde liegenden Variablen:

- Delta:  $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ : misst die Sensitivität des Optionspreises bezüglich Änderungen im Wertpapierpreis und wird oft als Hedge-Parameter verwendet
- Theta:  $\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$ : misst die Sensitivität des Optionspreises mit der Zeit und ist wichtig um den Zeitwert einer Option zu bestimmen (auch:  $\Theta = -\frac{\partial V}{\partial T}$ )
- Gamma:  $\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ : misst die Sensitivität des Optionspreises bezüglich Änderungen in Delta und ist wichtig um zu Bestimmen wie ein Portfolio auf große Änderungen im Preis reagiert
- Rho:  $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$ : misst die Sensitivität des Optionspreises bezüglich Änderungen des risikofreien Zinssatzes

Daneben gibt es noch viele weitere Greeks zu den einzelnen Ableitungen nach den Parametern in den folgenden Marktmodellen, z.B. Vega:  $\mathcal{V} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$ .



# Kapitel 3

## Marktmodelle

### 3.1 Marktannahmen

Die folgenden Annahmen an den Markt werden in der Regel getroffen:

1. Es handelt sich um einen reibungsfreien Finanzmarkt, d.h.
  - es werden keine Transaktionskosten und Steuern berücksichtigt,
  - der Aktien bzw. Optionshandel ist zu jedem Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  möglich,
  - gewünschte Transaktionen können in beliebigem Umfang ohne Rückwirkung auf die Kursentwicklung durchgeführt werden,
  - Wertpapiere stehen in beliebig teilbaren Einheiten zur Verfügung.
2. Der Markt lässt keine Arbitragemöglichkeiten zu.

Desweiteren nimmt man an, dass der Markt (z.B. der Wertpapierkurs) durch ein Modell beschrieben werden kann. Man unterscheidet zwischen deterministischen und stochastischen und zwischen (zeit-)kontinuierlichen und (zeit-)diskreten Modellen.

### 3.2 Stochastische Prozesse

Stochastische Modelle werden durch sogenannte stochastische Differentialgleichungen (SDEs) beschrieben. SDEs sind Differentialgleichungen in denen ein oder mehrere Terme stochastische Prozesse sind (damit ist die Lösung einer SDE auch wieder ein stochastischer Prozess).

**Definition 3.2.1 (Stochastischer Prozess)** *Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \Sigma, P)$  (mit Ergebnismenge  $\Omega$ , Ereignisalgebra  $\Sigma$  und Wahrscheinlichkeitsmass  $P$  auf*

$\Sigma$ ), ein weiterer mit einer Sigma-Algebra versehener Raum  $(Z, \mathcal{Z})$  und eine Indexmenge  $T$ . Ein stochastischer Prozess ist dann eine Sammlung von Zufallszahlen

$$X(t) : \Omega \rightarrow Z \quad (3.1)$$

für alle  $t \in T$  wobei die Abbildung  $X(t)$   $Z$ -messbar sein muss.

#### Anmerkungen:

- Wenn  $T$  abzählbar ist (z.B.  $T = \mathbb{N}_0$ ), so heisst der Prozess zeitdiskret, ansonsten zeitstetig.
- Wenn  $Z$  endlich oder abzählbar ist, so heisst der Prozess wertediskret oder Punktprozess.

**Definition 3.2.2 (Markov-Prozess)** Ein Markov-Prozess ist ein stochastischer Prozess, bei dem die bedingte Wahrscheinlichkeit für einen zukünftigen Zustand nur vom aktuellen Zustand des Prozesses und nicht von vergangenen Zuständen abhängt, d.h.

$$P[X(t+s) = y | X(u) = x(u) \forall u < t] = P[X(t+s) = y | X(t) = x(t)] \quad (3.2)$$

für alle  $s > 0$ .

**Hinweis:** Die verfügbaren Informationen über den Verlauf eines Prozesses werden genauer durch Filtrationen  $F(t)$  (aufsteigende Familien von Sigma-Algebren) gefasst.

**Definition 3.2.3 (Levy-Prozess)** Ein Levy-Prozess ist ein (zeitstetiger) Markov-Prozess mit stationären und unabhängigen Zuwächsen, d.h.

- $X(t) - X(s)$  und  $X(v) - X(u)$  sind unabhängig voneinander für  $s \leq t \leq u \leq v$
- $X(t+u) - X(t) \sim X(s+u) - X(s)$  für alle  $s, t, u$

### 3.3 Grundlegende stochastische Prozesse

**Definition 3.3.1 (Bernoulli-Prozess)** Ein Bernoulli-Prozess  $B(t) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$  ist ein zeit- und wertediskreter Levy-Prozess mit den folgenden Eigenschaften:

- $B(0) = 0$
- $B(t) - B(t-1) = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \end{cases}$

**Eigenschaften:**

- Zum Zeitpunkt  $t$  genügt  $B(t)$  der Binomialverteilung

$$P(B(t) = k) = \binom{t}{k} p^k (1-p)^{t-k} \quad (3.3)$$

- $B(t)$  hat Erwartungswert  $E(B(t)) = tp$  und Varianz  $Var(B(t)) = tp(1-p)$

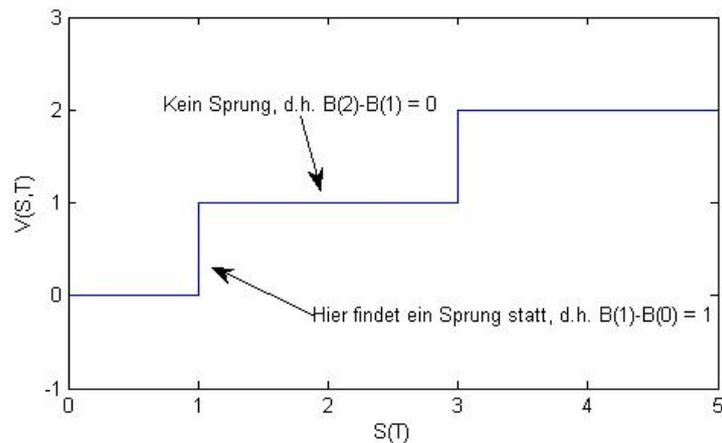


Abbildung 3.1: Beispielpfad eines Bernoulli-Prozesses.

**Definition 3.3.2 (Poisson-Prozess)** Ein Poisson-Prozess  $N_\lambda(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$  mit Intensität  $\lambda$  ist ein zeitstetiger und wertediskreter Levy-Prozess mit den folgenden Eigenschaften:

- $N(0) = 0$
- $N(t)$  ist fast sicher rechtsseitig stetig
- $N(t) - N(s) \sim P(\lambda \cdot (t - s))$

wobei  $P(\nu)$  eine Poisson-verteilte Zufallszahl mit Ereignisrate  $\nu$  ist.

**Definition 3.3.3 (Poisson-verteilte Zufallszahl)** Eine Poisson-verteilte Zufallszahl mit Ereignisrate  $\lambda$  (mittlere Zahl von Ereignissen in einer Zeiteinheit) ist eine Zufallsvariable  $X$  mit der diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (3.4)$$

mit  $\bar{x} \in \mathbb{N}_0$ .

**Eigenschaften:**

- $N(t)$  hat Erwartungswert  $E(N(t)) = \lambda t$  und Varianz  $Var(N(t)) = \lambda t$
- Der Parameter  $\lambda$  stellt gleichzeitig das Mittel und die Varianz der Zahl  $k$  der auftretenden Ereignisse dar.

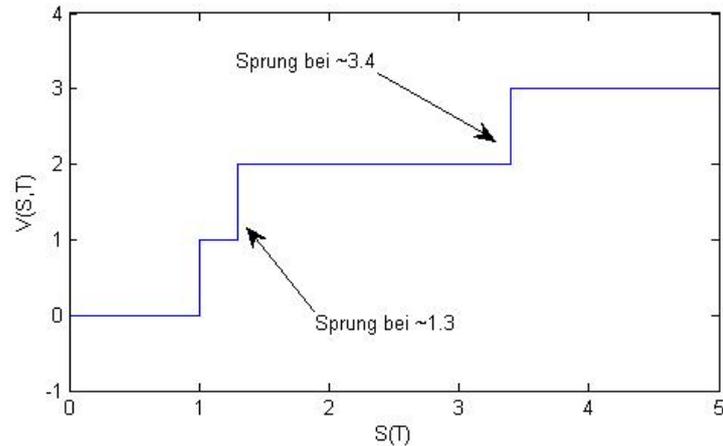


Abbildung 3.2: Beispielpfad eines Poisson-Prozesses

**Definition 3.3.4 (Wiener-Prozess)** Ein Wiener-Prozess  $W(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein zeit- und wertstetiger Levy-Prozess mit den folgenden Eigenschaften:

- $W(0) = 0$
- $W(t)$  ist fast sicher stetig
- $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s} \cdot N(0,1) = N(0,t-s)$

wobei  $N(0,1)$  eine normalverteilte Zufallszahl mit Mittelwert 0 und Varianz 1 ist.

**Definition 3.3.5 (Normalverteilte Zufallszahl)** Eine normalverteilte Zufallszahl mit Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  ist eine stetige Zufallsvariable  $X$  mit Wahrscheinlichkeitsdichte (Verteilungsfunktion)

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (3.5)$$

d.h.

$$P(X < \bar{x}) = \Phi(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\bar{x}} \phi(x) dx \quad (3.6)$$

wobei  $\Phi(\bar{x})$  die kumulative Verteilungsfunktion ist.

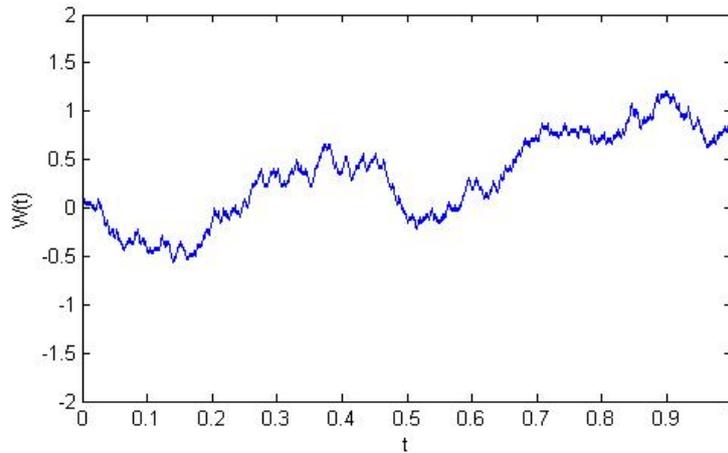


Abbildung 3.3: Beispielpfad eines Wiener-Prozesses

**Eigenschaften:**

- Die Pfade eines Wiener-Prozesses sind fast sicher an keiner Stelle differenzierbar
- Wiener-Prozesse sind selbstähnlich unter Streckung, d.h.  $\frac{1}{\alpha}W(\alpha t)$  ist wieder ein Wiener-Prozess
- Zum Zeitpunkt  $t$  ist  $W(t)$  normalverteilt mit Erwartungswert  $E(W(t)) = 0$  und Varianz  $Var(W(t)) = t$ .

**Zusammenhänge:**

- Lässt man im Bernoulli-Prozess  $B(t)$   $t$  nach  $\infty$  laufen und hält dabei  $p$  fest, dann konvergiert bei geeigneter Skalierung  $B(t) - tp$  gegen den Wiener-Prozess.
- Lässt man  $t$  nach  $\infty$  und  $p$  nach 0 laufen während  $tp$  gegen  $\lambda$  konvergiert, dann konvergiert  $B(t)$  gegen den Poisson-Prozess  $N_\lambda(t)$ .

**Satz 3.3.6 (Berry-Esseen)** *Es sei  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen über einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \Sigma, P)$ . Der Erwartungswert  $\mu = E(X_1)$ , die Varianz  $\sigma^2 = Var(X_1)$  und das dritte absolute Moment  $\varphi = E(|X_1 - \mu|^3)$  mögen existieren. Dann gilt für*

$$F_n(x) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right)$$

und einer Konstanten  $C$

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leq \frac{C\varphi}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

### 3.4 Black-Scholes Modell

**Definition 3.4.1 (Black-Scholes-Modell)** *Im Black-Scholes-Modell folgt der Preis des zugrunde liegenden Wertpapiers der einer geometrischen Brownschen Bewegung mit konstantem Drift  $\mu$  und konstanter Volatilität  $\sigma$*

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (3.7)$$

wobei  $W(t)$  ein Wiener-Prozess ist.

Diese Schreibweise ist eine informelle Darstellung der Integralgleichung

$$S(t+s) - S(t) = \int_t^{t+s} \mu S(u)du + \int_t^{t+s} \sigma S(u)dW(u) \quad (3.8)$$

(wobei der zweite Term ein sogenanntes Itô-Integral ist).

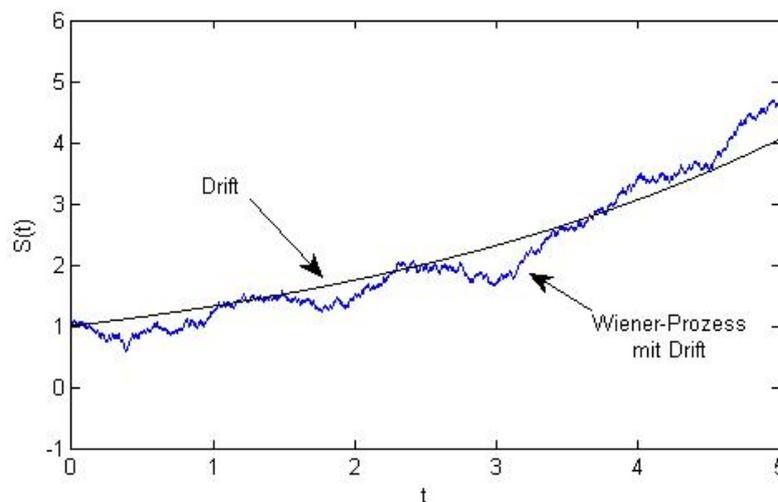


Abbildung 3.4: Beispiel der Preisentwicklung einer Aktie nach dem Black-Scholes-Modell

**Anmerkungen:**

- für  $\sigma = 0$  erhält man die gewöhnliche Differentialgleichung  $dS(t) = \mu S(t)dt$ , die einer Verzinsung mit Zinsrate  $\mu$  entspricht
- für  $\mu = 0$  ist  $S(t)$  ein Martingal (d.h. der Erwartungswert von  $S(t+s)$  ist gleich  $S(t)$ )

Das Black-Scholes-Modell ist ein Beispiel für einen Itô-Prozess.

**Satz 3.4.2 (Itô-Lemma)** Sei  $S(t)$  ein Itô-Prozess, d.h.

$$dS(t) = f(S, t)dt + g(S, t)dW(t) \quad (3.9)$$

für zwei Funktionen  $f, g$  und  $V(S, t)$  eine Funktion mit stetigen Ableitungen  $\frac{\partial V}{\partial S}$ ,  $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$  und  $\frac{\partial V}{\partial t}$ . Dann folgt  $V(S, t)$  dem Itô-Prozess

$$dV(t) = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + f(S, t)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}(g(S, t))^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + g(S, t)\frac{\partial V}{\partial S}dW(t) \quad (3.10)$$

*Beweis (vereinfacht):* Wir entwickeln  $V(S, t)$  in eine Taylor-Reihe in  $S$  und  $t$  und haben

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 + \dots$$

setzt man  $dS = fdt + gdW$  ein, erhält man

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S}(fdt + gdW) + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(f^2dt^2 + 2fgdtdW + g^2dW^2) + \dots$$

Für  $dt \rightarrow 0$  kann man die Terme  $dt^2$  und  $dtdW$  vernachlässigen und  $dW^2$  strebt nach  $dt$  (gilt wegen  $dW^2 \rightarrow E(dW^2) = dt$ ). Fasst man die übrigen Terme zusammen, so erhält man das Lemma.  $\square$

**Anmerkung:** Im Black-Scholes-Modell ist  $f(S, t) = \mu S(t)$  und  $g(S, t) = \sigma S(t)$ , also nahezu die einfachste Wahl für  $f$  und  $g$ .

**Satz 3.4.3** Die Lösung der Black-Scholes-SDE ist gegeben durch

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)} \quad (3.11)$$

*Beweis:* Sei  $V(S, t) = \ln(S(t)/S(0))$ , dann gilt

$$\begin{aligned} d(\ln(S(t)/S(0))) &= 0 + \left( S(t)\mu\frac{1}{S(t)} + \frac{1}{2}S(t)^2\sigma^2\left(-\frac{1}{S(t)^2}\right) \right) dt + S(t)\sigma\frac{1}{S(t)}dW(t) = \\ &= \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW(t) \\ \ln(S(t)/S(0)) &= \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \\ S(t) &= S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)} \end{aligned}$$

und da  $\lim_{t \rightarrow 0} S(t) = S(0)$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Anmerkungen:**

- aus der vorletzten Zeile in obigem Beweis sieht man, dass der logarithmische Wertzuwachs  $\ln(S(t)/S(0))$  normalverteilt mit Mittelwert  $(\mu - \sigma^2/2)t$  und Varianz  $\sigma^2 t$  ist. Damit ist  $S(t)$  lognormalverteilt.

- Wegen  $E(e^{\sigma W(t)}) = e^{\sigma^2 t/2}$  gilt für den Erwartungswert von  $S(t)$

$$E(S(t)) = S(0) \cdot e^{\mu t} \quad (3.12)$$

und für die Varianz von  $S(t)$

$$Var(S(t)) = E(S^2(t)) - (E(S(t)))^2 = S^2(0)e^{(2\mu + \sigma^2)t} - (S(0) \cdot e^{\mu t})^2 = S^2(0)e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1) \quad (3.13)$$

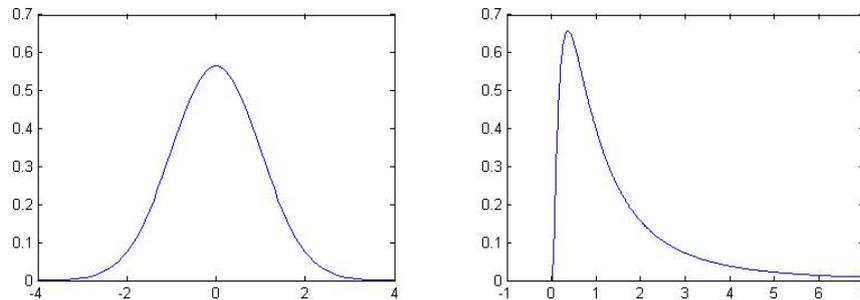


Abbildung 3.5: Dichtefunktion der Normalverteilung (links) und der Lognormalverteilung (rechts)

## 3.5 Erweiterungen des Black-Scholes Modells

Das Black-Scholes Modell hat den Nachteil, dass die Abhängigkeit der Volatilität vom Ausübungspreis und von der Restlaufzeit, die im Markt beobachtet werden können, nicht dargestellt werden kann.

### 3.5.1 Lokale Volatilität

**Definition 3.5.1 (Lokale Volatilitäts-Modell, Dupire (1994))** *Im Lokale-Volatilitäts-Modell folgt der Preis des zugrunde liegenden Wertpapiers einer geometrischen Brownschen Bewegung mit konstantem Drift  $\mu$  und variabler Volatilität  $\sigma(S, t)$*

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma(S, t)S(t)dW(t). \quad (3.14)$$

Hierbei wird die spezielle Form von  $\sigma(S, t)$  aus den implizierten Volatilitäten der Marktpreise ermittelt.

### 3.5.2 Sprung-Diffusions-Modelle

**Definition 3.5.2 (Sprung-Diffusions-Modell)** *Im Sprung-Diffusions-Modell folgt der Preis des zugrunde liegenden Wertpapiers dem Black-Scholes Modell mit einem zusätzlichen Sprungterm*

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW(t) + \eta S dN(t) \quad (3.15)$$

wobei  $N$  ein Poisson-Process mit Intensität  $\lambda$  ist und  $\eta$  eine Impulsfunktion, die einen Sprung von  $S$  nach  $S(1 + \eta)$  generiert.

Es wurden viele Formen für  $\eta$  empfohlen, man unterscheidet folgende Klassen:

- $\eta$  nicht singular: endliche Aktivität (endliche Zahl von Sprüngen in einer endlichen Periode)
- $\eta$  singular: unendliche Aktivität, endliche Variation
- $\eta$  hypersingular: unendliche Aktivität, unbegrenzte Variation

Einige Beispiele:

- normalverteilt (Merton, 1976):  $\eta(x) = N(\mu, \sigma)$
- Gamma:  $\eta(x) = C \frac{e^{-Mx}}{|x|}$
- Varianz-Gamma (Dilib, Eugene 1990):  $\eta(x) = \begin{cases} C \frac{e^{-Gx}}{-x} & x < 0 \\ C \frac{e^{-Mx}}{x} & x > 0 \end{cases}$
- CGMY (Carr, Geman, Madan, Yor 2002):  $\eta(x) = \begin{cases} C \frac{e^{-Gx}}{(-x)^{1+Y}} & x < 0 \\ C \frac{e^{-Mx}}{x^{1+Y}} & x > 0 \end{cases}$

### 3.5.3 Stochastische Volatilität

**Definition 3.5.3 (Stochastische-Volatilitäts-Modell)** *In Stochastische-Volatilitäts-Modellen folgt der Preis des zugrunde liegenden Wertpapiers einem System von SDEs:*

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sqrt{\sigma(t)} S(t) dW(t) \quad (3.16)$$

$$d\sigma(t) = a(\sigma, t) dt + b(\sigma, t) d\tilde{W}(t) \quad (3.17)$$

mit Funktionen  $a(\sigma, t)$ ,  $b(\sigma, t)$ , wobei mit  $W(t)$  und  $\tilde{W}(t)$  zwei Wiener-Prozesse mit Korrelation  $\rho dt$  sind.

Häufig verwendete Stochastische-Volatilitäts-Modelle:

- Heston-Modell (1993):  $d\sigma(t) = \theta(\omega - \sigma(t)) dt + \xi \sqrt{\sigma(t)} d\tilde{W}(t)$
- GARCH-Modell (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedacity, Bollerslev, 1986):  $d\sigma(t) = \theta(\omega - \sigma(t)) dt + \xi \sigma(t) d\tilde{W}(t)$

### 3.5.4 Binomialmodell

**Definition 3.5.4 (Binomialmodell, Cox, Ross und Rubinstein, 1979)** *Im Binomialmodell (CRR-Modell) folgt der Preis des zugrunde liegenden Wertpapiers der Dynamik*

$$S(t + \Delta t) = S(t)(d + (u - d)(B(t + \Delta t) - B(t))), \quad (3.18)$$

wobei  $B(t)$  ein Bernoulli-Prozess mit Parameter  $p$  ist, sowie zwei weitere Parameter  $u$  und  $d$ , die die Stärke eines Aufwärts- ( $u$ ) bzw. Abwärts ( $d$ )-Sprungs ( $u > d$ ) definieren.

Es gilt also:

$$S(t + \Delta t) = \begin{cases} S(t) \cdot u & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ S(t) \cdot d & \text{mit Wahrscheinlichkeit } (1 - p) \end{cases} \quad (3.19)$$

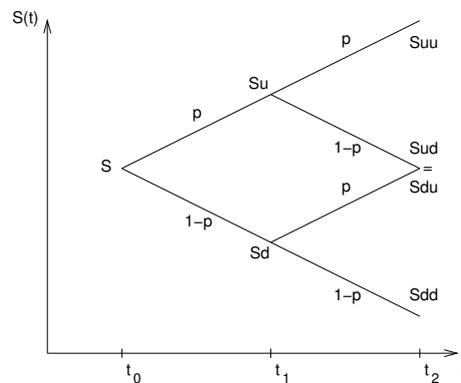


Abbildung 3.6: Die ersten beiden Schritte des Binomialbaums.

Im Binomialmodell gilt:

- Erwartungswert:  $E(S(t + \Delta t)) = pS(t)u + (1 - p)S(t)d$
- Varianz:  $Var(S(t + \Delta t)) = p(S(t)u)^2 + (1 - p)(S(t)d)^2 - S^2(t)(pu + (1 - p)d)^2 = S^2(t)p(1 - p)(u + d)^2$

Man kann  $u$ ,  $d$  und  $p$  so fixieren, dass die Erwartungswerte und Varianzen des Binomialmodells und des Black-Scholes-Modells gleich sind. Als dritte Gleichung kann man z.B. wählen

$$u \cdot d = 1. \quad (3.20)$$

Nach der Lösung des (nichtlinearen) Gleichungssystems ergeben sich die drei Parameter  $u$ ,  $d$  und  $p$  als Funktionen von  $\sigma$ ,  $r$  und  $\Delta t$  über:

$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1} \quad (3.21)$$

$$d = 1/u = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (3.24)$$

mit  $\beta = \frac{1}{2}(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t})$ .

**Anmerkung 1:** Andere Wahlen der dritten Gleichung sind möglich, siehe z.B. Leisen, Reimer (1996).

**Anmerkung 2:** Das Binomialmodell für  $S(t)$  nähert sich dem Black-Scholes Modell für  $\Delta t \rightarrow 0$  an, es gilt z.B. für den Erwartungswert  $E(S(t))$  und die Varianz  $Var(S(t))$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (p \ln \frac{u}{d} + \ln d) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t \quad (3.25)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} p(1-p) (\ln \frac{u}{d})^2 = \sigma^2 t \quad (3.26)$$

*Beweis:* Zentraler Grenzwertsatz (standardisierte Summe von identisch verteilten ZV approximiert Standard-Normalverteilung). Als Erinnerung die Log-Inkrementen  $\ln(S(t)/S(0))$  sind im Black-Scholes-Modell normalverteilt.

**Anmerkung:** Verallgemeinerungen des Binomialmodells auf mehrere Zweige (Binomialmodell: 2 Zweige, Trinomialmodell: 3 Zweige, Multinomialmodell  $2b + 1$  Zweige) sind möglich.

### 3.5.5 Mehrdimensionale Modelle

Für Optionen auf mehrere Basiswerte wird ein Modell für den Kursverlauf aller Basiswerte  $S_1(t), S_2(t), \dots, S_k(t)$  benötigt

**Definition 3.5.5 (Multivariates Black-Scholes Modell)** *Im multivariaten Black-Scholes Modell folgen die Preise  $S_i(t), 1 \leq i \leq k$ , einem gekoppelten System von  $m$  Differentialgleichungen*

$$dS_i(t) = \mu_i S_i(t) dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} S_i(t) dW_j(t), \quad (3.27)$$

mit dem Driftvektor  $\mu \in \mathbb{R}^k$  und der Volatilitätsmatrix  $\sigma \in \mathbb{R}^{k \times m}$ .

**Beispiel 3.5.6** *Ein System von 2 Differentialgleichung sieht dann wie folgt aus*

$$\begin{aligned} dS_1(t) &= \mu_1 S_1(t) dt + \sigma_{1,1} S_1(t) dW_1(t) + \sigma_{1,2} S_1(t) dW_2(t), \\ dS_2(t) &= \mu_2 S_2(t) dt + \sigma_{2,1} S_2(t) dW_1(t) + \sigma_{2,2} S_2(t) dW_2(t). \end{aligned}$$

**Anmerkung:** Üblicherweise ist  $m < k$ , wenn z.B.  $k$  die Zahl der Aktien in einem Aktienindex ist, dann wird oft  $m$  als die Zahl der Branchen gewählt (Beispiel: DAX:  $k = 30$ ,  $m = 5$ ). Dann stellt  $\sigma_{ij}$  die Abhängigkeit der Aktie  $i$  von der Branche  $j$  dar.

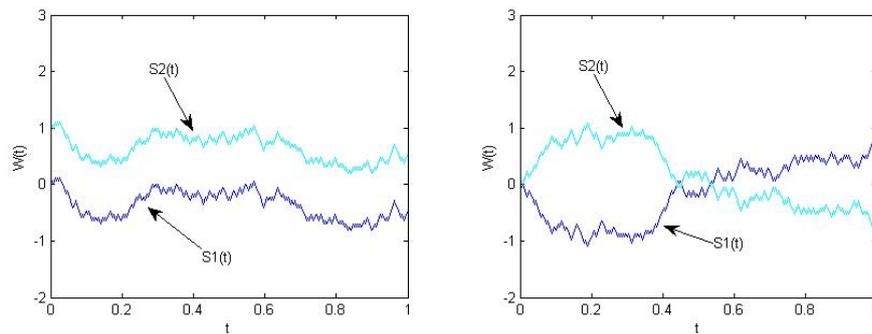


Abbildung 3.7: Beispielpfade der Basiswerte bei perfekt positiver Korrelation (links) bzw. bei perfekt negativer Korrelation (rechts).

**Ausblick:**

- Multivariate Lokale Volatilitätsmodelle  $\rightarrow \sigma_{ij}(S_1, \dots, S_k, t)$
- Multivariate Sprung-Diffusionsmodelle  $\rightarrow$  gemeinsame Sprungwahrscheinlichkeiten
- Multivariate Binomialmodelle  $\rightarrow \sigma_{ij}$

# Kapitel 4

## Bewertungsverfahren

### 4.1 PDE-Ansatz

**Satz 4.1.1** *In einem arbitrage-freien Markt gilt unter dem Black-Scholes-Modell für den Preis einer Option die Black-Scholes Differentialgleichung (PDE):*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (4.1)$$

*Beweis:* Aus dem Itô-Lemma folgt

$$dV(t) = \left( \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW(t) \quad (4.2)$$

Durch eine geeignete Kombination von Wertpapieren  $S$  und Optionen  $V$  eliminiert man den Zufallsterm. Hierzu betrachtet man ein Portfolio bestehend aus 1 Option und  $b$  Wertpapieren (short)

$$\Pi = V - bS \quad (4.3)$$

dann gilt

$$d\Pi = dV - bdS \quad (4.4)$$

und

$$d\Pi(t) = \left( \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW(t) - bdS \quad (4.5)$$

$$= \left( \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt + \left( \mu S \frac{\partial V}{\partial S} dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW(t) \right) - bdS \quad (4.6)$$

$$= \left( \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt + \left( \frac{\partial V}{\partial S} - b \right) dS \quad (4.7)$$

Setzt man nun  $b = \frac{\partial V}{\partial S}$  verschwindet der Zufallsterm  $dW$  und es gilt für das Portfolio

$$d\Pi(t) = \left( \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) dt \quad (4.8)$$

Aufgrund des Arbitrage-Prinzips muss der Wert des Portfolios gleich dem Wert einer risikofreien Anlage sein, d.h.

$$d\Pi = r\Pi dt \quad (4.9)$$

Daraus folgt:

$$d\Pi = r(V - bS)dt = \left( rV - rS \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt \quad (4.10)$$

und damit die Behauptung.  $\square$

**Anmerkungen:**

- $\Delta$  ist ein Hedge-Parameter und genau die Zahl der Wertpapiere, die benötigt werden, um das Portfolio  $\Pi$  risikolos zu machen.
- Die Black-Scholes-Gleichung ist eine rückwärts parabolische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten.

Das Anfangs-Randwertproblem benötigt Anfangsbedingungen bei  $t = T$  und Randbedingungen bei  $S = 0$  und  $S = \infty$ .

Für eine europäische Call Option sind diese beispielsweise

- $t = T$ : Auszahlungsfunktion der Option  $V(S, T) = \max\{S(T) - K, 0\}$
- $S = 0$ :  $V(0, t) = 0$
- $S = \infty$ :  $V(\infty, t) = S - Ke^{-r(T-t)}$  (aus Put-Call Parität)  
alternativ: Neumann-Bedingungen:  $\frac{\partial V}{\partial S} = 1$ , auch  $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0$

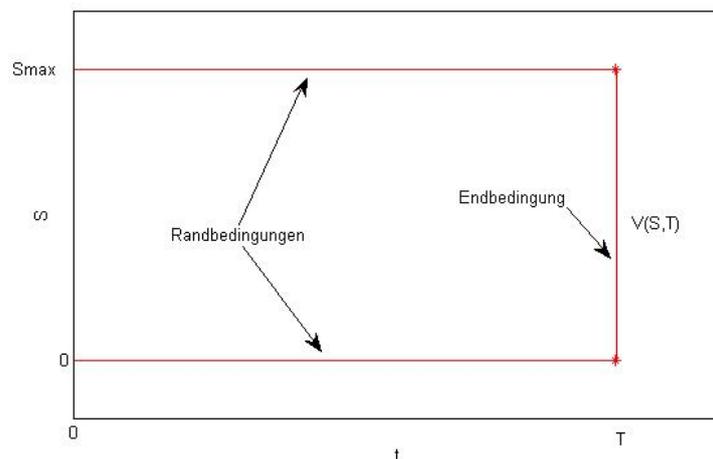


Abbildung 4.1: Beispielgrafik zu einem Anfangs- und Randwertproblem.

**Satz 4.1.2** *In einem arbitrage-freien Markt gilt unter dem Black-Scholes-Modell für den Preis einer Amerikanischen Put Option das freie Randwertproblem: finde  $(V(S, t), S_f(t))$  so dass gilt:*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{für } S > S_f \text{ und } 0 \leq t < T \quad (4.11)$$

$$V(S, t) = V(S, T) \quad \text{für } S \leq S_f \text{ und } 0 \leq t < T \quad (4.12)$$

mit Anfangs- und Randbedingungen wie oben und den Bedingungen, dass  $V$ ,  $\frac{\partial V}{\partial S}$  und  $S = S_f(t)$  stetig sind.

*Beweis:* analog zu oben □

## 4.2 Martingal-Ansatz

Zur Motivation des Martingal-Ansatzes betrachten wir nun ein einfaches Ein-Perioden-Modell mit zwei Zeitpunkten  $t = 0$  und  $t = \Delta t$ . Als Wertpapiere sind zugelassen: eine Aktie mit Kurs  $S(t)$ , eine risikofreie Anleihe mit Kurs  $B(t)$  und eine Call-Option auf das Wertpapier  $C(t)$ . Als Aktionen sollen auf dem Markt möglich sein:

- Der Ankauf/Verkauf von Anleihen zum Einheitswert  $B(0) = 1$  und Zinssatz  $r$ ,
- der Ankauf/Verkauf von Aktien zum Wert  $S(0)$  und
- der Ankauf/Verkauf einer Call-Option mit Ausübungspreis  $K$  und Verfallszeit  $\Delta t$ .

Der Kursverlauf der Aktie sei durch einen Schritt eines Bernoulli-Prozesses gegeben als

$$S(\Delta t) = \begin{cases} uS(0) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ dS(0) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases} \quad (4.13)$$

mit  $p \in [0, 1]$ , sowie  $u$  und  $d$  reelle Zahlen mit  $u > d > 0$ . Die Auszahlung zur Zeit  $\Delta t$  ist damit

$$C(\Delta t) = \begin{cases} C^u := (uS(0) - K)^+ & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p \\ C^d := (dS(0) - K)^+ & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p \end{cases} \quad (4.14)$$

Nimmt man an, dass der Markt arbitragefrei ist, muss gelten

$$d \leq e^{r\Delta t} \leq u \quad (4.15)$$

denn man könnte

- falls  $e^{r\Delta t} > u$  durch den Kauf von Anleihen, der durch Aktienverkäufe finanziert ist und
- falls  $e^{r\Delta t} < d$  durch einen kreditfinanzierten Kauf von Aktien

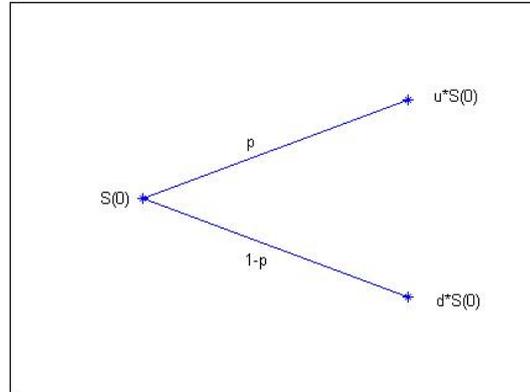


Abbildung 4.2: Einperiodiger Bernoulli-Prozess.

einen risikofreien Gewinn erzielen. Um den fairen Preis der Call Option unter diesem Modell zu finden, konstruiert man ein Portfolio aus  $c_1$  Anleihen und  $c_2$  Aktien, das die gleiche Auszahlung wie die Option besitzt, also

$$c_1 B(t) + c_2 S(t) = C(t) \text{ für } t \in \{0, \Delta t\} \quad (4.16)$$

Die Unbekannten  $c_1$  und  $c_2$  können nur für  $t = \Delta t$  bestimmt werden aus

$$c_1 e^{r\Delta t} + c_2 u S(0) = C^u \text{ und } c_1 e^{r\Delta t} + c_2 d S(0) = C^d, \quad (4.17)$$

daraus folgt

$$c_1 = \frac{u C^d - d C^u}{(u - d) e^{r\Delta t}} \text{ und } c_2 = \frac{C^u - C^d}{(u - d) S(0)}. \quad (4.18)$$

Daraus lässt sich der Optionspreis bestimmen als

$$\begin{aligned} C(0) &= c_1 1 + c_2 S(0) = \\ &= \frac{u C^d - d C^u}{(u - d) e^{r\Delta t}} + \frac{C^u - C^d}{u - d} = \\ &= e^{-r\Delta t} \left( \frac{u C^d - d C^u + e^{r\Delta t} (C^u - C^d)}{u - d} \right) = \\ &= e^{-r\Delta t} \left( \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} C^u + \frac{u - d - (e^{r\Delta t} - d)}{u - d} C^d \right) = \\ &= e^{-r\Delta t} \left( q C^u + (1 - q) C^d \right) \text{ mit } q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \end{aligned}$$

Aus  $d \leq e^{r\Delta t} \leq u$  folgt  $0 \leq q \leq 1$ , somit kann  $q$  als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden. Bezüglich dieser Wahrscheinlichkeit hat der Wert der Aktie zum Zeitpunkt  $t = \Delta t$  den Erwartungswert

$$E(S(\Delta t)) = q u S(0) + (1 - q) d S(0) = e^{r\Delta t} S(0), \quad (4.19)$$

er ist also gleich einer risikofreien Anlage zum Zinssatz  $r$ . Die Wahrscheinlichkeit  $q$  heißt daher *risikoneutrale Wahrscheinlichkeit*. Bezüglich dieser Wahrscheinlichkeit ist der Optionspreis

$$C(0) = e^{r\Delta t} E^q(V(\Delta t)) = e^{r\Delta t} E^q((S(\Delta t) - K)^+), \quad (4.20)$$

somit ist der Optionspreis der diskontierte Erwartungswert der Auszahlung unter der Wahrscheinlichkeit  $q$ . Dieses Resultat lässt sich nun folgendermaßen verallgemeinern.

**Definition 4.2.1 (Martingal-Eigenschaft)** *Ein stochastischer Prozess  $S(t)$  heißt Martingal, falls gilt:*

$$E(S(t + \Delta t)|S(t)) = S(t). \quad (4.21)$$

für alle  $t, \Delta t > 0$ .

Beispiele für Martingale sind:

- ein Wiener-Prozess  $W(t)$  ohne Drift ( $\mu = 0$ )
- ein Poisson-Prozess, der um den Drift bereinigt ist:  $P_\lambda(t) - \lambda t$
- ein Bernoulli-Prozess, der um den Drift bereinigt ist:  $B(t) - tp$

**Definition 4.2.2 (Äquivalentes Martingal-Maß)** *Das äquivalente Martingalmaß  $P^*$  zu der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$  von  $S(t)$  ist dasjenige Wahrscheinlichkeitsmaß unter dem der diskontierte Prozess  $e^{-rt}S(t)$  ein Martingal ist:*

$$e^{-r\Delta t} E^*(S(t + \Delta t)|S(t)) = S(t) \quad (4.22)$$

*d.h. der Erwartungswert der Zufallsvariable  $e^{-r\Delta t}S(t + \Delta t)$  unter dem äquivalenten Martingalmaß hat keinen Trend.*

**Anmerkungen:**

- im Black-Scholes Modell wird unter  $P^*$  der Drift  $\mu$  durch die risikofreie Zinsrate  $r$  ersetzt.
- das äquivalente Martingalmaß muss nicht eindeutig sein (z.B. bei Levy-Prozessen)

**Satz 4.2.3 (Martingal-Ansatz für Europäische Optionen)** *Der faire Wert einer Option ohne vorzeitiges Ausübungsrecht ist der diskontierte Erwartungswert der Auszahlung unter der risiko-neutralen Wahrscheinlichkeitsverteilung der zugrundeliegenden ökonomischen Faktoren:*

$$V(S, 0) = e^{-rT} E^*(V(S, T)), \quad (4.23)$$

wobei  $E^*$  der Erwartungswert unter dem äquivalenten Martingalmaß ist.

*Beweis:* Girsanov-Theorem, Selbstfinanzierung (siehe Harrison, Pliska 1981)  $\square$

**Satz 4.2.4 (Martingal-Ansatz für Amerikanische Optionen)** *Der faire Wert einer Option mit vorzeitigem Ausübungsrecht ist die Lösung des optimalen Stopp-Problems*

$$V(S, 0) = \max_{0 \leq t \leq T} e^{-rt} E^*(V(S(t), t)) \quad (4.24)$$

*Beweis:* s.o.  $\square$

# Kapitel 5

## Geschlossene Bewertungsformeln

### 5.1 Black-Scholes Formel

**Satz 5.1.1 (Black-Scholes Formel)** *Der Preis einer Europäischen Call Option unter dem Black-Scholes Modell ist*

$$V(S, 0) = S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \quad (5.1)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln(S(0)/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (5.2)$$

und

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (5.3)$$

wobei  $\Phi(x)$  die kumulative Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Varianz 1 ist.

*Beweis:* Mit dem Martingal-Ansatz läßt sich der Erwartungswert  $E^*$  aus (4.23) als folgendes Integral schreiben

$$V(S, 0) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} V(S, T) dx. \quad (5.4)$$

Mit Satz (geschlossene Lösung von  $S(t)$ ) sowie der Submultiplikationseigenschaft der Normalverteilung

$$\Phi(0, t) = \sqrt{t}\Phi(0, 1) (\sim W(t)) \quad (5.5)$$

gilt dann für Call Optionen

$$V(S, 0) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \max\left\{S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}x} - K, 0\right\} dx. \quad (5.6)$$

Sei nun  $\chi$  die Lösung der Gleichung  $S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}\chi} - K = 0$ , also

$$\chi = \frac{\ln \frac{K}{S(0)} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (5.7)$$

dann gilt

$$V(S, 0) = e^{-rT} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left( S(0) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x} - K \right) dx. \quad (5.8)$$

Der erste Summand dieses Integranden läßt sich berechnen als

$$e^{-rT} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} S(0) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}x} dx = S(0) \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sigma\sqrt{T}-x)^2} dx = S(0) \Phi(\sigma\sqrt{T}-\chi) \quad (5.9)$$

und für den zweiten Summanden gilt entsprechend

$$e^{-rT} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} K dx = K e^{-rT} \Phi(-\chi) \quad (5.10)$$

was genau der Black-Scholes Formel entspricht.  $\square$ .

*Anmerkung:* Ganz analog (bzw. über die Put-Call Parität) läßt sich der Preis für Europäische Put Optionen ermitteln als

$$V(S, 0) = K e^{-rT} \phi(-d_2) - S \phi(-d_1) \quad (5.11)$$

*Beweis 2:* Auch über den PDE-Ansatz läßt sich die Black-Scholes Formel herleiten. Zu Lösen ist dabei

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (5.12)$$

über  $0 \leq S \leq \infty$ ,  $0 \leq t \leq T$  mit Endbedingung  $V(S, T) = \max\{S(T) - K, 0\}$ . Zur Diskontierung nehmen wir die Substitution  $u(S, t) = e^{-rt} V(S, T)$  vor, was mit der Produktregel zur PDE in  $u$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rS \frac{\partial u}{\partial S} = 0 \quad (5.13)$$

führt. Nun nehmen wir die Substitutionen  $y = \log S$ ,  $\tau = T - t$  vor. Nachdem

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dS} = \frac{1}{S} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.14)$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{1}{S} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.15)$$

was durch Einsetzen zu

$$-\frac{\partial u}{\partial \tau} + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.16)$$

führt. Mit der letzten Substitution  $z = y - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau$  erhält man dann

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5.17)$$

über  $-\infty < z < \infty$  und  $0 \leq \tau \leq T$  mit Anfangsbedingungen  $u(0, z) = e^{-rT} \max\{e^z - K, 0\}$ . Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung (kann man z.B. über die Fourier-Transformation herleiten) ist

$$G_\tau(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} e^{-z/2\sigma^2\tau} \quad (5.18)$$

und die Lösung zu den Anfangsbedingungen  $u(0, z)$  ist gegeben durch die Faltung

$$u(z, \tau) = u(0, z) * G_\tau(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} \max\{e^v - K, 0\} e^{-(z-v)^2/2\sigma^2\tau} dv \quad (5.19)$$

Die Originallösung  $V$  erhält man über

$$V(S, t) = e^{rt} u(\log S - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t), T - t) \quad (5.20)$$

zurück und damit

$$V(S, 0) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2T}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{rT} \max\{e^v - K, 0\} e^{-(\log S(0) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T - v)^2/2\sigma^2T} dv. \quad (5.21)$$

Die Lösung des Integrals geschieht analog zum Martingal-Ansatz.  $\square$

*Anmerkung 1:* Zur Anwendung der Black-Scholes Formel muss noch die kumulative Normalverteilung  $\Phi(d) = \int_{-\infty}^d \phi(x) dx$  an verschiedenen Punkten  $d$  ausgewertet werden. Hierzu gibt es verschiedene Verfahren:

- approximiere durch Quadraturverfahren:  $\Phi(d) \approx \sum_{i=1}^N w_i \phi(x_i)$
- interpoliere  $\Phi(d)$  durch Polynome:  $\Phi(d) \approx \sum_{i=1}^N c_i b(d)$ .
- Beispiel: Moro-Verfahren verwendet stückweise Approximation mit gebrochenrationalen Polynomen in den drei Teilgebieten  $[0, 1.87]$ ,  $[1.87, 6]$  und  $[6, \infty]$  (für  $d < 0$  berechnet man einfach  $1 - \Phi(-d)$ ) und erhält eine Genauigkeit von 8 Stellen.

*Anmerkung 2:* Neben dem Optionspreis  $V$  existieren auch geschlossene Lösungsformeln für die Greeks, z.B. für Call Optionen:

- $\Delta = \Phi(d_1)$
- $\Gamma = \phi(d_1)/(S\sigma\sqrt{T})$
- $\Theta = rKe^{-rT}\Phi(d_2) + S\phi(d_1)\sigma/(2\sqrt{T})$
- $\mathcal{P} = TKe^{-rT}\Phi(d_2)$
- $\mathcal{V} = S\phi(d_1)\sqrt{T}$

*Anmerkung 3:* Für Europäische Optionen gibt es geschlossene Lösungsformeln auch mit anderen Modellen, z.B.

- Black-Scholes Modell mit variabler Verzinsung
- Black-Scholes Modell mit zeitabhängiger Volatilität
- Heston-Modell für stochastische Volatilität
- Merton Sprung-Diffusion (Sprünge sind normalverteilt)

*Anmerkung 4:* Für das Black-Scholes Modell gibt es geschlossene Lösungsformeln auch für andere Typen von Optionen, z.B.

- Optionen mit speziellen Auszahlungen: Digitale Optionen, Cap Optionen
- Asiatische Optionen für das diskrete und kontinuierliche geometrische Mittel.  
Im kontinuierlichen Fall gilt:

$$V(S, 0) = S(0)r^{-1/2(r+1/2\sigma^2)T}\Phi(d + \sigma\sqrt{T/3}) - Ke^{-rT}\Phi(d) \quad (5.22)$$

mit

$$\frac{\log(S(0)/K) + 1/2(r - 1/2\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T/3}}$$

Im diskreten Fall gilt:

$$V(S, 0) = S(0)A\Phi(d + \sigma\sqrt{T_1}) - Ke^{-rT}\Phi(d) \quad (5.23)$$

mit

- $A = e^{-r(T-T^2) - \sigma^2(T_2-T_1)/2}$
- $d = \frac{\log(S(0)/K) + (r - 1/2\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T_1}}$
- $T_1 = \frac{T - M(M-1)(4M+1)}{\sigma M^2}$
- $T_2 = T - \frac{(M-1)T}{2M}$
- $M$ : Anzahl der Auswertungspunkte

- einige pfadabhängige Optionen, z.B. Lookback Optionen und Barrier Optionen
- Optionen auf mehrere Basiswerte: Basket Optionen mit geometrischem Mittel, Spread, Outperformance Optionen
- Amerikanische Optionen mit unendlicher Laufzeit

- Bermudsche Optionen nach Geske, Johnson (1984), z.B. Put Option mit zwei Ausübungszeitpunkten  $T/2$  und  $T$ :

$$V(S, T) = Ke^{-rT/2}\Phi(-d_2(S, S_{T/2}^*, T/2)) - S\Phi(-d_1(S, S_{T/2}^*, T/2)) \quad (5.24)$$

$$+ Ke^{-rT}\Phi^{(2)}(d_2(S, S_{T/2}^*, T/2), -d_2(S, K, T), -1/\sqrt{2}) \quad (5.25)$$

$$- S\Phi^{(2)}(d_1(S, S_{T/2}^*, T/2), -d_1(S, K, T), -1/\sqrt{2}) \quad (5.26)$$

Dabei bezeichnet  $\Phi^{(2)}(x, y, \rho)$  die zweidimensionale kumulative Normalverteilung mit Korrelation  $\rho$  am Punkt  $(x, y)$ . Der kritischen Aktienkurs  $S_{T/2}^*$  löst die nichtlineare Gleichung

$$K - V(S_{T/2}^*, T/2) = S_{T/2}^*, \quad (5.27)$$

wobei  $V(S_{T/2}^*, T/2)$  der Wert einer Europäischen Put Option zum Zeitpunkt 0 mit Basiswert  $S_{T/2}^*$  und Laufzeit  $T/2$  ist. Weiterhin gilt

$$d_1(S, K, T) = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ und } d_2(S, K, T) = d_1(S, K, T) - \sigma\sqrt{T}. \quad (5.28)$$

Analog für  $m$  Ausübungszeitpunkte benötigt man  $m$ -dimensionale Normverteilungen sowie die Lösung  $m - 1$ -dimensionaler Fixpunktgleichungen.

- Amerikanische Optionen nach Zhu (2006): explizite Lösungsdarstellung des freien Randes und damit auch des Optionspreises als unendliche Summe von zweidimensionalen Integralen



# Kapitel 6

## Baumverfahren

### 6.1 Binomialverfahren

Die Idee vom Binomialverfahren ist die Verwendung des Binomialmodells (Abschnitt 3.5.4) als Approximation des Black-Scholes Modells zur Optionspreisbewertung. Als Erinnerung: Im Binomialmodell gilt

$$S(t + \Delta t) = S(t)(d + (u - d)B(t/\Delta t)) \quad (6.1)$$

wobei  $u$ ,  $d$  und  $p$  so bestimmt werden, dass die Erwartungswerte und Varianzen der beiden Modelle übereinstimmen.

Die Binomialmethode besteht aus zwei Phasen, der Vorwärts- und der Rückwärtsphase.

**1. Vorwärtsphase:** Initialisierung der zukünftigen Wertpapierkurse. Man stellt sich die verschiedenen Ausgänge als zweidimensionales Feld  $S_{ji}$  vor, wobei  $S_{00} = S(t_0)$  der Startwert ist und setzt

$$S_{ji} = S(t_0)u^j d^{i-j} \quad (6.2)$$

für  $1 \leq i \leq M$  und  $0 \leq j \leq i$ . Damit ist  $S_{ji}$  der  $j$ -te mögliche Ausgang zum Zeitpunkt  $t_i$ .

*Anmerkungen:*

- Für Europäische Optionen reicht es hierbei aus,  $S_{ji}$  nur für  $i = M$  und  $j = 0, \dots, i$  statt für alle  $i$  und  $j$  zu berechnen.
- Bei Amerikanischen und Bermudischen Optionen muß aufgrund des vorzeitigen Ausübungsrechts jedoch das ganze Feld berechnet werden.

**2. Rückwärtsphase:** Berechnung der Optionspreise. Die Optionspreise werden in einem entsprechenden Feld  $V_{ji}$  abgelegt. Zum Zeitpunkt  $T = t_M$  ist der Wert der Option  $V$  aufgrund der Payoff-Funktion bekannt und es gilt damit

$$V_{jM} = (S_{jM} - K)^+ \quad (6.3)$$

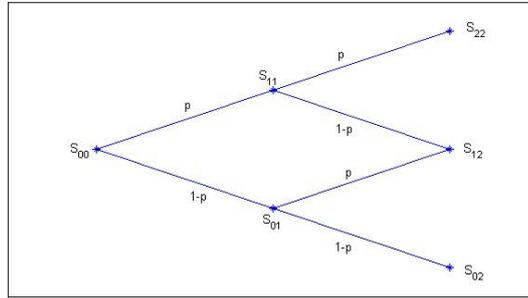


Abbildung 6.1: Beispielbaum (M=2)

für Call Optionen und entsprechend  $V_{jM} = (K - S_{jM})^+$  für Put Optionen. Nun werden rückwärts die Werte  $V_{ji}$  jeweils für  $t_i$  aus  $t_{i+1}$  im Falle von Europäischen Optionen berechnet als

$$V_{ji} = e^{-r\Delta t} \cdot (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1}). \quad (6.4)$$

Bei Amerikanischen Optionen muß noch überprüft werden ob vorzeitige Ausübung erfolgt und es gilt für Call Optionen

$$V_{ji} = \max\{(S_{ji} - K)^+, e^{-r\Delta t} \cdot (pV_{j+1,i+1} + (1-p)V_{j,i+1})\} \quad (6.5)$$

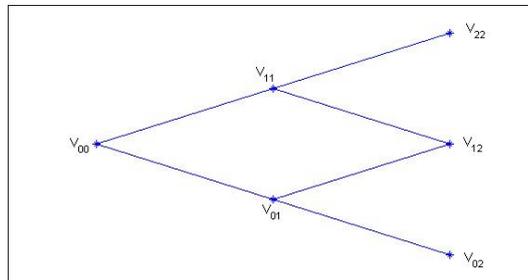


Abbildung 6.2: Der zur Abbildung 6.1 gehörige Baum der Optionspreise.

und für Put Optionen die entsprechende Formel mit  $(K - S_{ji})^+$ . Damit ist  $V(S, 0) = V_{00}$  der berechnete Optionspreis zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$ .

**Beispiel 6.1.1** Berechnung der Preise für eine europäische, sowie für eine amerikanische Call Option mit den Parameter  $M = 2, u = 1.1, d = 0.9, p = 0.5, e^{-r\Delta t} = 0.5, S(0) = 100, K = 95$ .

*Berechnung des Preises der europäischen Call Option:*

$$V_{00} = 0.5^2(0.5^2 * 26 + 0.5^2 * 4 * 2) = 2.125$$

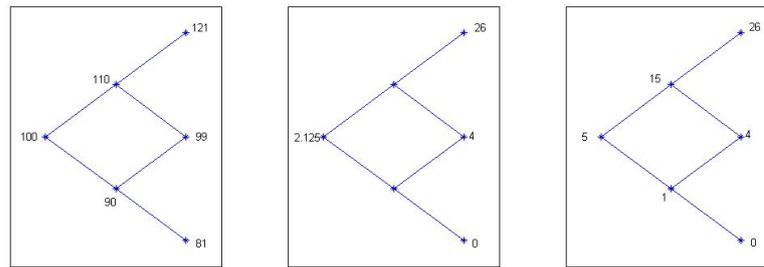


Abbildung 6.3: Baum des Aktienkurses (links), der europäischen Call Option (mitte), sowie der amerikanischen Call Option (rechts)

*Berechnung des Preises der amerikanischen Call Option:*

- $V_{11} = \max\{(S_{11} - K)^+, 7.5\} = \max\{15, 7.5\} = 15$
- $V_{01} = \max\{(S_{01} - K)^+, 1\} = \max\{0, 1\} = 1$
- $V_{00} = \max\{(S_{00} - K)^+, 0.5 * (0.5 * 15 + 0.5 * 1)\} = \max\{5, 4\} = 5$

Der Gesamtalgorithmus lautet dann wie folgt:

```

Berechne  $u, d, p$  aus (3.21)–(3.24)
 $S_{00} = S(0)$ 
for  $i = 1, \dots, M$ 
  for  $j = 0, \dots, i$ 
    Setze  $S_{ji} = S_{00}u^j d^{i-j}$ 
  for  $j = 0, \dots, i$ 
    Berechne  $V_{jM}$  aus (6.3)
for  $i = M - 1, \dots, 0$ 
  for  $j = 0, \dots, i$ 
    Berechne  $V_{ji}$  aus (6.4) bzw. (6.5)
 $V = V_{00}$ 

```

Algorithmus: Die Binomialmethode.

*Eigenschaften:*

- Aufwand:  $N = O(M^2)$
- Genauigkeit:  $\varepsilon = O(M^{-1})$ , es gilt für  $V(S, t)$  näherungsweise die Black-Scholes PDE, d.h.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = O(\Delta t) \quad (6.6)$$

(siehe auch Finite Differenzen)

- Ebenfalls zeigbar ist die Konvergenz des Binomialpreises gegen den Black-Scholes Preis
- Gesamtkomplexität:  $\varepsilon(N) = O(M^{-1/2})$

## 6.2 Erweiterungen der Binomialmethode

### 6.2.1 Pfadabhängige Optionen

Bei pfadabhängigen Optionen wird zur Ermittlung des fairen Preises der Kurs des Underlyings zu mehreren Zeitpunkten benötigt. Im Gegensatz zu europäischen Optionen, bei denen nur der Kurs zum Endzeitpunkt von Bedeutung ist.

#### Beispiel 6.2.1 (*Up-and-Out Call Option*)

Eine Up-and-Out Call Option ist durch die Auszahlungsfunktion

$$V(S, T) = \begin{cases} (S(t) - K)^+ & \text{für } S(t) < H, 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.7)$$

definiert. Bei dieser Option muss das Binomialmodell an jedem Knoten auf die zusätzliche Bedingung,  $S(t) < H$ , überprüft werden.

#### Beispiel 6.2.2 (*Asiatische Optionen*)

Bei asiatischen Optionen muss der Aktienkurs zu mehreren Zeitpunkte  $t_i, i = 1, \dots, n$ , ausgewertet werden. Damit kann im Binomialmodell der Optionswert zum Zeitpunkt  $T$  für die einzelnen Pfade berechnet werden. Im diskret arithmetischen Fall ist die Auszahlungsfunktion gegeben durch

$$V(S, T) = \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S(t_i) - K \right)^+. \quad (6.8)$$

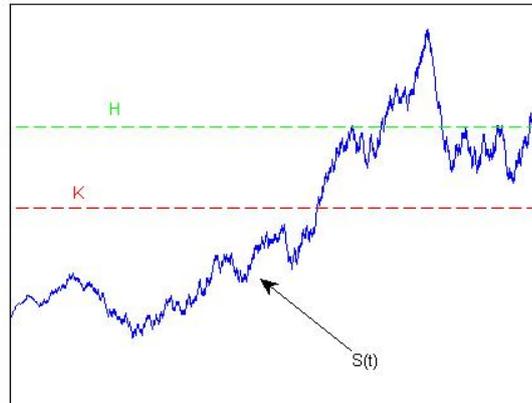


Abbildung 6.4: Up-and-Out Call Option

### 6.3 Multinomialbäume

Statt zweier potentieller Ausgänge betrachtet man hier drei (Trinomialbäume) oder mehrere Ausgänge und erstellt die Wahrscheinlichkeiten durch Momenten-Matching. Bei Trinomialbäumen betrachtet man z.B. als mögliche Kursentwicklungen

$$S(t + \Delta t) = \begin{cases} S(t)u & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_u \\ S(t) & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_m \\ S(t)d & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_d \end{cases} \quad (6.9)$$

wobei die Parameter wie folgt gewählt werden:

$$p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}(r - \sigma^2/2) + \frac{1}{6} \quad (6.10)$$

$$p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}}(r - \sigma^2/2) + \frac{1}{6} \quad (6.11)$$

$$p_m = 1 - p_d - p_u = 2/3, u = e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}, d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{3\Delta t}} \quad (6.12)$$

*Anmerkung:* Die Trinomialmethode mit geeigneter Parameterwahl entspricht der Binomialmethode, bei der jeder zweite Zeitschritt weggelassen wird.

Allgemein, bei  $2b + 1$  Ausgängen spricht man von Multinomialbäumen. Setzt man

$$S(t + \Delta t) = \begin{cases} S(t)b\Delta W & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_b \\ S(t)(b-1)\Delta W & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_{b-1} \\ \dots & \dots \\ S(t)(-b)\Delta W & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p_{-b} \end{cases} \quad (6.13)$$

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten setzt man  $p_{-k} = p_k$  für  $1 \leq k \leq b$  und löst für die übrigen  $p_k$  folgendes lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 2\Delta W^2 & 2(2\Delta W)^2 & \dots & 2(b\Delta W)^2 \\ 0 & 2\Delta W^4 & 2(2\Delta W)^4 & \dots & 2(b\Delta W)^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2\Delta W^{2b} & 2(2\Delta W)^{2b} & \dots & 2(b\Delta W)^{2b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \Delta t \\ 3\Delta t^2 \\ \vdots \\ \frac{(2b)!}{2^b b!} (\Delta t)^b \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

*Anmerkungen:*

- für höhere  $b$  kann auch eine höhere Konvergenzrate  $O(M^{-(b-1)/2})$  erwartet werden, sofern die Auszahlungsfunktion  $2b$ -mal differenzierbar ist (was sie in der Praxis aber nie ist).
- für Optionen mit endlich vielen Ausübungszeitpunkten (Bermuda-Optionen) erhält man auch Konvergenz indem man  $b$  erhöht und  $M$  festlässt.
- der Aufwand des Verfahrens beträgt  $N = O(M^2 b^2)$
- der Aufwand läßt sich mit der schnellen Gauß-Transformation auf  $N = O(M^2 b)$  reduzieren (Broadie, Yamamoto, 2004).

# Kapitel 7

## Simulationsverfahren

Der grundlegende Ansatz bei Simulationsverfahren ist, den Optionspreis als diskontierten Erwartungswert darzustellen. Das führt bei Europäischen Optionen zur Darstellung

$$V(S, 0) = e^{-rT} E^*(V(S, T)) \quad (7.1)$$

und bei Amerikanischen Optionen zu

$$V(S, 0) = \max_{0 \leq t \leq T} e^{-rt} E^*(V(S(t), t)) \quad (7.2)$$

bzw. allgemeiner bei Bermuda-Optionen zu

$$V(S, 0) = \max_{t \in \mathcal{T}} e^{-rt} E^*(V(S(t), t)), \quad (7.3)$$

wobei  $\tau = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  die Ausübungszeitpunkte sind. Hierbei ist  $E^*$  das äquivalente Martingalmaß, d.h. der Erwartungswert wird in der risikoneutralen Welt genommen, in der  $S$  ein Martingal ist.

Simulationsverfahren besitzen zwei Komponenten:

- ein Pfaddiskretisierungsverfahren zur Bestimmung von  $S(t)$
- ein Quadraturverfahren zur Berechnung von  $E^*$

### 7.1 Pfaddiskretisierung

Alle Pfaddiskretisierungsverfahren verwenden eine Zeitdiskretisierung von  $[0, T]$ . Der Einfachheit halber verwenden wir im Folgenden eine äquidistante Diskretisierung in  $m - 1$  Zeitintervalle zwischen den Zeitpunkten  $t_i = i \cdot t/m, i = 1, \dots, m$ .

### 7.1.1 Random Walk

Im Black-Scholes Modell ist der Wert der Aktie zum Zeitpunkt  $t_i$  durch

$$S(t_i) = S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t_i + \sigma W(t_i)} \quad (7.4)$$

gegeben. Nun ist noch die Diskretisierung des Wiener Prozesses  $W(t)$  nötig, die im einfachsten Fall durch einen Zufallspfad (Random Walk) erzeugt wird, der über die Beziehung

$$W(t_{j+1}) = W(t_j + \Delta t) = W(t_j) + \sqrt{\Delta t} z_j \quad (7.5)$$

für  $j = 0 \dots M - 1$  definiert ist. Hierbei sind  $z_j$   $N(0, 1)$ -normalverteilte Zufallsvariablen und  $W(0) = 0$ . Damit gilt für  $S(t_i)$ :

$$S(t_i) = S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t_i + \sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{j=0}^{i-1} z_j} \quad (7.6)$$

### 7.1.2 Brownsche Brücke

Alternativ läßt sich der Pfad des Wertpapiers hierarchisch über die sogenannte Brownsche Brücke diskretisieren. Hierbei wird der Wert des Wiener Prozess nicht nur durch den jeweils vorhergehenden Wert inkrementell erzeugt, sondern durch einen vorhergehenden und einen zukünftigen Wert, d.h.

$$W(t_j + \Delta t) = \frac{1}{2}(W(t_j) + W(t_j + 2\Delta t)) + \sqrt{\Delta t/2} z_j. \quad (7.7)$$

Auf diese Weise wird erst der Kurs zum Zeitpunkt  $T$  auf normale Art und Weise mittels Formel (7.4) und  $W(T) = \sqrt{T} z$  ermittelt. Dann berechnet man  $W(T/2)$  aus  $W(0)$  und  $W(T)$  und damit  $S(T/2)$ , daraufhin  $W(T/4)$  aus  $W(0)$  und  $W(T/2)$  und damit  $S(T/4)$ , dann  $W(3T/4)$  aus  $W(T/2)$  und  $W(T)$  und damit  $S(3T/4)$ , und so weiter. Hierbei wollen wir der Einfachheit annehmen, daß  $M$  eine Potenz von 2 ist.

Der Vorteil dieser Konstruktion ist, daß nun die Varianz der Zufallsvariablen unterschiedlich groß ist.

### 7.1.3 Direkte Diskretisierung der SDE

Für komplexere Modelle als das Black-Scholes Modell werden numerische Methoden zur direkten Diskretisierung der SDE eingesetzt. Das einfachste Verfahren ist dabei das Euler-Maruyama Verfahren für Gleichungen der Form  $dS(t) = a(S, t)dt + b(S, t)dW(t)$ :

$$\hat{S}(t_{i+1}) = \hat{S}(t_i) + a(S(t_i))\Delta t + b(S(t_i))(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \quad (7.8)$$

**Definition 7.1.1 (Starke und schwache Konvergenz)** *Ein numerisches Verfahren zur Lösung einer stochastischen Differentialgleichung heißt stark konvergent mit Ordnung  $\alpha$ , falls*

$$E(|\hat{S}(t_i) - S(t_i)|) \leq cm^{-\alpha} \forall t_i \quad (7.9)$$

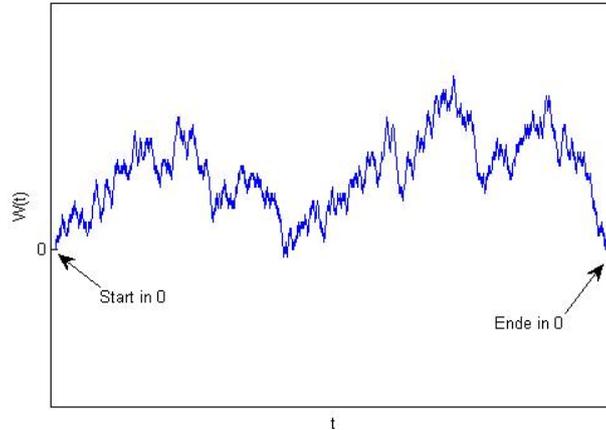


Abbildung 7.1: Brownsche Brücke mit Startwert 0 und deterministischen Endwert 0.

und schwach konvergent mit Ordnung  $\alpha$  falls für  $f \in C^{2\alpha+2}$

$$(|E(f(\hat{S}(t_i))) - E(f(S(t_i)))| \leq cm^{-\alpha} \forall t_i. \quad (7.10)$$

**Theorem 7.1.2 (Konvergenz des Euler-Maruyama Verfahrens)** *Das Euler-Maruyama Verfahren konvergiert stark mit Ordnung 1/2 falls*

$$|a(S, t) - a(S, s)| + |b(S, t) - b(S, s)| \leq K(1 + |S|)\sqrt{|t - s|} \quad (7.11)$$

und schwach mit Ordnung 1, wenn  $a(S), b(S) \in C^4$ .

*Beweis:* siehe Kloeden, Platen oder Glasserman. □

#### 7.1.4 Generierung von normalverteilten Zufallszahlen

Normalverteilte Zufallsvariablen werden in der Regel durch  $[0, 1]$ -gleichverteilte im Rechner generierte Pseudo-Zufallszahlen und durch entsprechende Transformation mit der inversen kumulativen Normalverteilung ermittelt. Zur Erinnerung: die kumulative Normalverteilung zum Mittelwert 0 und Varianz 1 ist definiert als:

$$\Phi(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\bar{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \quad (7.12)$$

Wenn nun  $\bar{z}$  eine  $[0, 1]$ -gleichverteilte Zufallszahl ist, dann ist  $z = \Phi^{-1}(\bar{z})$  eine  $N(0, 1)$ -normalverteilte Zufallszahl.

Zur Berechnung von  $\Phi^{-1}$  gibt es viele Methoden:

- Box-Muller Methode: erzeugt Paare normalverteilter Zufallszahlen  $z_1, z_2$  aus Paaren gleichverteilter Zufallszahlen  $u_1, u_2$  durch

$$z_1 = r \cos \phi = \sqrt{-2 \ln(1 - u_1)} \cos(2\pi u_2), \quad (7.13)$$

$$z_2 = r \sin \phi = \sqrt{-2 \ln(1 - u_1)} \sin(2\pi u_2). \quad (7.14)$$

- Polar-Methode: wie Box-Muller ohne Verwendung von trigonometrischen Funktionen, setze

$$q = (2u_1 - 1)^2 + (2u_2 - 1)^2 \quad (7.15)$$

wobei  $q \leq 1$  sein muss (ansonsten wähle neue Zufallszahlen  $u_1, u_2$ ), dann ist

$$z_1 = (2u_1 - 1)p \quad (7.16)$$

$$z_2 = (2u_2 - 1)p \quad (7.17)$$

mit  $p = \sqrt{-2 \ln q/q}$

- Moro-Methode: verwendet stückweise Approximation von  $\Phi$  durch gebrochenrationale Polynome und direkte Inversion (ca. 8 Stellen Genauigkeit)
- Inversionsmethode: verwendet ein Nullstellenverfahren (z.B. Newton-Verfahren) zur Berechnung von  $\Phi^{-1}$ , allgemein einsetzbar

## 7.2 Simulationsverfahren

### 7.2.1 Monte Carlo Simulation

Bei dem Monte Carlo Verfahren wird ein Integrand an (gleichverteilt) zufällig ausgewählten Stützstellen ausgewertet und der Integralwert als Mittel der Funktionswerte an diesen Stützstellen berechnet, d.h.

$$If := \int_0^1 f(x) dx \approx Q_n f := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i). \quad (7.18)$$

**Theorem 7.2.1 (Konvergenz des Monte Carlo-Verfahrens)** *Für den Erwartungswert des Integrationsfehlers gilt*

$$E(|If - Q_n f|) = \frac{\sigma(f)}{\sqrt{N}} \quad (7.19)$$

wobei

$$\sigma^2(f) := \int_{[0,1]} f^2(x) dx - \left( \int_{[0,1]} f(x) dx \right)^2 \quad (7.20)$$

```

Setze  $y = 0$ 
für  $i = 1 \dots N$ 
  für  $j = 1 \dots M$ 
    Ziehe eine  $[0, 1]$  gleichverteilte Zufallsvariable  $x_j$ 
    Transformiere die Zufallsvariable über die inverse Normalverteilung:  $z_j = N^{-1}(x_j)$ 
    Berechne die Wertpapierkurse  $S(t_j)$  aus Formel (28) und (29)
  Ermittle aus den simulierten Kursen den Wert der Option  $V(S, T)$ 
  Setze  $y = y + V(S, T)$ 
Der Optionspreis ist dann das arithmetische Mittel nach Diskontierung:  $V(S, 0) = e^{-rT} y/N$ 

```

Algorithmus: Optionspreisbewertung durch Simulation.

*Beweis: Gesetz der großen Zahlen*

□

Das bedeutet, daß 100-mal mehr Funktionsauswertungen benötigt werden um eine Stelle mehr an Genauigkeit zu erreichen.

*Implikation:* Ist  $\sigma(f)$  konstant oder zumindest beschränkt, dann ist die Konvergenzrate  $1/2$ :

$$E(|If - Q_n f|) = cN^{-1/2}$$

Dies bedeutet, falls der Fehler um den Faktor 2 verringert werden soll, sind 4-mal so viele Funktionsauswertungen nötig.

Damit läßt sich der Optionspreis durch obigen Algorithmus näherungsweise bestimmen.

*Anmerkungen:* Das Monte Carlo Verfahren läßt sich durch Varianzreduktionstechniken beschleunigen, z.B.:

- Antithetische Variate: Symmetrisiere die Zufallszahlen (und damit den Zufallspfad) durch  $z'_j = -z_j$  und Mittelung der Ergebnisse
- Importance Sampling: sample die Bereiche stärker, die wichtiger für das Ergebnis sind - eine Schätzung für wichtige Bereiche können geschlossenen Lösungsformeln für verwandte Optionen liefern
- Stratified Sampling: Unterteile das Integrationsgebiet in Teilgebiete und stelle sicher, dass jedes Teilgebiet etwa die gleiche Zahl von Samples erhält

### 7.2.2 Optionsbewertung mit Monte-Carlo Simulation

Das Ziel ist es den Optionspreis  $V(S, 0)$  zu ermitteln. Zuerst wird eine europäische Call-Option betrachtet.

$$V(S, 0) = e^{-rT} E^*[V(S, T)] \quad (7.21)$$

$$= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \max\{S(0)e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}x} - K, 0\} dx \quad (7.22)$$

$$= e^{-rT} \int_0^1 \max\{S(0)e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}\Phi^{-1}(y)} - K, 0\} dy, \quad (7.23)$$

wobei im letzten Schritt die Substitution  $x = \Phi^{-1}(y)$  verwendet wurde. Das Integral in (7.23) kann jetzt mittels Monte Carlo Simulation näherungsweise bestimmt werden. Dazu setzt man

$$f(x) = \max\{S(0)e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}\Phi^{-1}(x)} - K, 0\}$$

in (7.18) ein. Daraus folgt:

$$V(S, 0) \approx e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max\{S(0)e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}\Phi^{-1}(x_i)} - K, 0\},$$

mit  $x_i \sim U(0, 1)$ .

für  $i = 1 \dots N$   
 ziehe eine gleichverteilte Zufallszahl  $x_i$   
 transformiere in eine normalverteilte Zufallszahl  $y_i = \Phi^{-1}(y)$  (z.B. mit Box-Muller)  
 berechne  $S_i(T)$   
 berechne  $V_i(S, T)$   
 bilde arithmetisches Mittel  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-rT} V_i(S, T)$

Algorithmus: Optionspreisbewertung einer europäischen Option durch Simulation.

Als nächstes wird eine pfadabhängige Option untersucht. Dazu wird eine diskrete asiatische Call Option mit 2 Zeitpunkten betrachtet. Die Auszahlungsfunktion ist gegeben durch:

$$V(S, T) = \left( \frac{1}{2} (S(T/2) + S(T)) - K \right)^+.$$

Ziel: Berechne

$$\begin{aligned} V(S, 0) &= e^{-rT} E^*[V(S, T)] \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-x_1^2/2} e^{-x_2^2/2} \left( \frac{1}{2} (S(T/2) + S(T)) - K \right)^+ dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

$S(T/2)$  kann direkt aus der Black-Scholes Formel bestimmt werden. Für  $S(T)$  ist dies nicht direkt möglich, da  $S(T)$  vom Wert  $S(T/2)$  abhängt. Aber eine kurze Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} S(T) &= S(T/2) e^{(r-\sigma^2/2)T/2 + \sigma\sqrt{T/2}x_2} \\ &= S(0) e^{(r-\sigma^2/2)T/2 + \sigma\sqrt{T/2}x_1} e^{(r-\sigma^2/2)T/2 + \sigma\sqrt{T/2}x_2} \\ &= S(0) e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T/2}(x_1+x_2)}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} V(S, 0) &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-x_1^2/2} e^{-x_2^2/2} \left( \frac{1}{2} (S(T/2) + S(T)) - K \right)^+ dx_1 dx_2 \\ &= e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-x_1^2/2} e^{-x_2^2/2} \left( \frac{1}{2} (S(0) e^{(r-\sigma^2/2)T/2 + \sigma\sqrt{T/2}x_1} \right. \\ &\quad \left. + S(0) e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T/2}(x_1+x_2)}) - K \right)^+ dx_1 dx_2 \\ &= e^{-rT} \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1}{2} (S(0) e^{(r-\sigma^2/2)T/2 + \sigma\sqrt{T/2}\Phi^{-1}(y_1)} \right. \\ &\quad \left. + S(0) e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T/2}(\Phi^{-1}(y_1) + \Phi^{-1}(y_2))}) - K \right)^+ dy_1 dy_2 \\ &\approx e^{-rT} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} (S(0) e^{(r-\sigma^2/2)T/2 + \sigma\sqrt{T/2}\Phi^{-1}(y_{1,i})} \right. \\ &\quad \left. + S(0) e^{(r-\sigma^2/2)T + \sigma\sqrt{T/2}(\Phi^{-1}(y_{1,i}) + \Phi^{-1}(y_{2,i}))}) - K \right)^+, \end{aligned}$$

mit  $y_{1,i}, y_{2,i} \sim U(0, 1)$ .

**Beispiel 7.2.2** Für  $S(0) = 100, S(T/2) = 110, S(T) = 105, K = 90$  ergibt sich  $V(S, T) = (1/2(110 + 105) - 90)^+ = 17.54$

für  $i = 1 \dots N$   
 ziehe gleichverteilte Zufallszahlen  $y_{1,i}; y_{2,i}$   
 transformiere in normalverteilte Zufallszahlen  $x_{1,i}; x_{2,i}$   
 berechne  $S_i(T/2), S_i(T)$   
 berechne Auszahlung  
 bilde arithmetisches Mittel

Algorithmus: Optionspreisbewertung einer asiatischen Option durch Simulation.

Als letztes Beispiel wird noch eine asiatische Option betrachtet, deren Auszahlungsfunktion von  $M$  Zeitpunkten  $t_1, \dots, t_M$  abhängt,

$$V(S, T) = \left( \frac{1}{M} \left( \sum_{j=1}^M S(t_j) \right) - K \right)^+.$$

Das Ziel ist es nun

$$V(S, 0) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{M/2}} e^{-x^T x/2} \left( \frac{1}{M} \left( \sum_{j=1}^M S(t_j) \right) - K \right)^+ dx_1, \dots, dx_M$$

näherungsweise zu berechnen. Dabei bezeichnet  $x$  einen  $M$ -dimensionalen Vektor. Wie im obigen Fall mit  $M = 2$  ermittelt sich der Aktienkurs  $S(t_j)$  aus dem Black-Scholes Modell

$$S(t_j) = S(t_{j-1}) e^{(r - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}x_j},$$

mit konstanter Schrittweite  $\Delta t = t_{j+1} - t_j$ . Damit ergibt sich der Monte Carlo Schätzer für den Optionspreis durch

$$V(S, 0) \approx e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \left( \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M S(t_j, x_j^i) \right) - K \right)^+,$$

mit  $x_1^i, \dots, x_M^i \sim U(0, 1)$  für  $i = 1, \dots, N$ .

### 7.2.3 Fehler der Monte Carlo Simulation

In diesem Kapitel wird die Konvergenzordnung der Monte Carlo Simulation bestimmt. Diese sagt aus wie gut die Approximation des Erwartungswertes ist. In unserem Fall ist der Erwartungswert, den wir bestimmen wollen, stets der gesuchte Optionspreis. Aber im allgemeinen kann jeder beliebige Erwartungswert durch Monte-Carlo Simulation genähert werden. Im Folgenden soll  $Y$  den Optionspreis bezeichnen,  $S(t)$  weiterhin den Aktienkurs

für  $i = 1 \dots N$   
 für  $j = 1 \dots M$   
 ziehe  $y_j^i \sim U(0, 1)$   
 transformiere in normalverteilte Zufallszahlen  $x_j^i$   
 berechne  $S_{i,j} = S(t_j, x_j^i)$   
 berechne  $V_i = \left( \left( \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M S_{i,j} \right) - K \right)^+$   
 berechne  $V_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i$

Algorithmus: Optionspreisbewertung einer asiatischen Option mit  $M$  Zeitpunkten.

zum Zeitpunkt  $t$  und  $f(S(t))$  ist der Wert der diskontierten Auszahlungsfunktion zum Aktienkurs  $S(t)$ . Somit gilt

$$Y = E[f(S(t))].$$

Die Näherung ist gegeben durch

$$\hat{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(S^i(t_1, \dots, t_M)).$$

$\hat{Y}$  ist der Monte Carlo Schätzer. Der Wert der Option ist von  $M$  Zeitpunkten abhängig und wir führen insgesamt  $N$  Pfadsimulationen durch um den Schätzer zu erhalten.

Als Fehlermaß sind uns mehrere Möglichkeiten gegeben. Eine Möglichkeit wäre es den mittleren absoluten Fehler

$$E[|Y - \hat{Y}|]$$

zu betrachten. Weitere Möglichkeiten sind der mittlere quadratische Fehler

$$MSE = E[|Y - \hat{Y}|^2],$$

sowie der root mean square error (RMSE)  $\sqrt{E[|Y - \hat{Y}|^2]}$ .

Der  $MSE$  wird sehr häufig verwendet, da er sich aus dem quadrierten Bias  $(E[\hat{Y} - Y])^2$  und der Varianz von  $Y$  zusammensetzt

$$\begin{aligned} MSE &= E[|Y - \hat{Y}|^2] \\ &= (E[\hat{Y} - Y])^2 + E[|Y - \hat{Y}|^2] - (E[\hat{Y} - Y])^2 \\ &= (E[\hat{Y} - Y])^2 + Var[Y] \\ &= c_1 \frac{1}{M^{2\alpha}} + c_2 \frac{1}{N}, \end{aligned}$$

wobei  $\alpha$  der schwachen Ordnung des Diskretisierungsverfahrens entspricht und  $c_1, c_2$  Konstanten sind. Um eine gewünschte Genauigkeit der Größenordnung  $\epsilon^2$  zu erhalten, d.h.

einen  $MSE$  von  $O(\epsilon^2)$ , muss  $N = O(\epsilon^{-2})$  und  $M = O(\epsilon^{-1/\alpha})$  gewählt werden. Der Rechenaufwand  $C$  ergibt sich nun aus der Anzahl der Simulationen  $N$  und der Anzahl der Diskretisierungsschritte  $M$ , d.h.

$$C = NM = O(\epsilon^{-2-1/\alpha}).$$

Wird  $C$  nun nach  $\epsilon^2$  aufgelöst erhält man den  $MSE$  in Abhängigkeit des Rechenaufwandes,

$$MSE = O(C^{\frac{-2\alpha}{2\alpha+1}}).$$

Wird als Diskretisierungsverfahren die Euler-Maruyama Methode verwendet, die eine schwache Ordnung  $\alpha = 1$  besitzt, gilt für den Fehler

$$MSE = O(C^{-2/3}) \quad \text{bzw.} \quad RMSE = O(C^{-1/3}).$$

### Konvergenzraten:

Interessant ist zu wissen, wie sich der Rechenaufwand verhält, wenn der Fehler verringert werden soll. Bei einer Konvergenzrate von 1 (d.h.  $MSE = O(C^{-1})$ ) muss der Rechenaufwand  $C$  verdoppelt werden um eine doppelte Genauigkeit  $\epsilon$  zu erzielen. Bei einer Konvergenzrate von  $1/2$  ist bereits der vierfache Rechenaufwand nötig um den Fehler zu halbieren. Bei einer Konvergenzrate von  $1/3$  versechsfacht sich der Rechenaufwand. Somit wird ein Nachteil der Monte Carlo Methode offensichtlich. Um eine Stelle mehr an Genauigkeit zu gewinnen, sind sehr viel mehr Pfadauswertungen nötig und somit entsteht schnell ein hoher Rechenaufwand.

### Verbesserungsmöglichkeiten:

Wie bereits erwähnt ist die Konvergenzrate der Monte Carlo Simulation von der Konvergenzordnung des verwendeten Diskretisierungsverfahrens abhängig. Daher kann die Konvergenzrate der Monte Carlo Simulation verbessert werden, indem ein Diskretisierungsverfahren höherer Ordnung verwendet wird (z.B. Milstein- oder Taylor-Verfahren). Eine weitere Möglichkeit ist es direkt ein Quadraturverfahren höherer Ordnung zu verwenden.

## 7.2.4 Quasi-Monte Carlo Simulation

Bei sogenannten Quasi-Monte Carlo Verfahren wird der Integrand nicht an zufälligen Stützstellen ausgewertet, sondern an deterministischen Stellen und die gleiche Mittelung wie bei Monte Carlo Verfahren angewandt, also wiederum

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i). \quad (7.24)$$

Hierbei werden als Stützstellen Punktfolgen mit niedriger Diskrepanz, also mit guten Gleichverteilungs-Eigenschaften verwendet. Eine dieser Punktfolgen ist die Van-der-Corput Folge.

**Definition 7.2.3 (Van-der-Corput-Folge)** Das  $i$ -te Folgenglied  $x_i$  der Van-der-Corput-Folge wird dadurch generiert, daß die Zahl  $i$  zur Basis  $p$  (wobei  $p$  eine Primzahl sein sollte) geschrieben wird, d.h

$$i = \sum_{k=0}^j d_k p^k, \quad (7.25)$$

wobei die  $d_k \in \{0, \dots, p-1\}$  die  $j$  Ziffern der Zahldarstellung sind. Dann ist die Stützstelle  $x_i$  definiert als die radikal Inverse (also die Spiegelung am Dezimalpunkt) der Zahl  $i$ , also

$$x_i = \sum_{k=0}^j d_k p^{-k-1}. \quad (7.26)$$

Die ersten Van-der-Corput Folgenglieder zur Basis 3 sind zum Beispiel  $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}$ .

Es gibt einen inkrementellen Algorithmus zur effizienten Generierung von  $x_i$  aus  $x_{i-1}$ :

```

Setze  $x = 0$ 
für  $i = 1 \dots N$ 
   $z = 1 - x$ 
   $v = 1/p$ 
  solange  $z < v + \varepsilon$ 
     $v = v/p$ 
   $x = x + (p + 1)v - 1$ 

```

Algorithmus: Van der Corput-Folge.

**Theorem 7.2.4 (Koksma-Hlawka Ungleichung)** Für den Integrationsfehler einer Quadraturformel mit Punkten  $x_1, \dots, x_N$  gilt

$$|If - Q_n f| \leq V(f) D^*(x_1, \dots, x_N), \quad (7.27)$$

wobei  $V(f)$  die Variation von  $f$

$$V(f) = \int_{[0,1]} |f'(x)| dx \quad (7.28)$$

und  $D^*(x_1, \dots, x_N)$  die Stern-Diskrepanz der Punkte  $x_i$

$$D^*(x_1, \dots, x_N) = \sup_{0 \leq a \leq 1} \left| \frac{m(a)}{M} - a \right| \quad (7.29)$$

ist und  $m(a)$  der Zahl der Punkte im Intervall  $[0, a]$  entspricht.

*Beweis:* Wir nehmen an dass die Punkte  $x_i$  sortiert sind,  $x_i \leq x_{i+1}$  und setzen  $x_0 = 0$  und  $x_1 = 1$ . Zunächst zeigen wir:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(x - \frac{i}{N}\right) df(x) \quad (7.30)$$

durch partielle Integration

$$\sum_{i=0}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(x - \frac{i}{N}\right) df(x) = \int_0^1 x df(x) - \sum_{i=0}^N \frac{i}{N} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \quad (7.31)$$

$$= [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) + \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_{i+1}) - f(1) \quad (7.32)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) - \int_0^1 f(x) dx \quad (7.33)$$

Nun gilt für festes  $i$  mit  $0 \leq i \leq N$

$$\left|x - \frac{i}{N}\right| \leq \max\left(\left|x_i - \frac{i}{N}\right|, \left|x_{i+1} - \frac{i}{N}\right|\right) \leq D^*(x_1, \dots, x_N) \text{ für } x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (7.34)$$

und mit der Dreiecksungleichung gilt die Behauptung.  $\square$

**Theorem 7.2.5 (Diskrepanz der Van-der-Corput Folge)** Für die Diskrepanz der Van-der-Corput Folge gilt

$$D^*(x_1, \dots, x_N) = O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (7.35)$$

*Beweis:* Für alle  $p^j$  Schritte mit  $j \geq 1$  bildet die Van-der-Corput Folge ein uniformes Gitter mit Stern-Diskrepanz  $O(\frac{1}{N})$ .  $\square$

**Theorem 7.2.6 (Konvergenz des Quasi-Monte Carlo Verfahrens (eindimensional))**

Für den Fehler des Quasi-Monte Carlo Verfahrens basierend auf der Van-der-Corput Folge gilt für Funktionen mit beschränkter Variation

$$|If - Q_n f| = c \cdot \frac{V(f)}{N} \quad (7.36)$$

*Beweis:* einsetzen  $\square$

Für mehrdimensionale Integrale verwendet man die gleiche Konstruktion

$$\int_{[0,1]^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i). \quad (7.37)$$

nur benötigt man mehrdimensionale Punktfolgen mit niedriger (mehrdimensionaler) Diskrepanz, z.B. die Halton Folge:

**Definition 7.2.7 (Halton-Folge)** Das  $n$ -te Folgenglied der Halton-Folge ist

$$(\mathbf{x})_n := ((x_1)_n, (x_2)_n, \dots, (x_d)_n), \quad (7.38)$$

wobei die  $(x_i)$  Van-der-Corput-Folgen bezüglich verschiedenen Basen sind.

Üblicherweise werden hierfür die ersten  $d$  Primzahlen verwendet um zu starke Korrelationen zwischen den Dimensionen zu vermeiden.

**Theorem 7.2.8 (Konvergenz des Quasi-Monte Carlo-Verfahrens (mehrdimensional))**

Für den Fehler des Quasi-Monte Carlo Verfahrens basierend auf der Halton Folge gilt für Funktionen mit beschränkter Variation (in Sinne von Hardy und Krause)

$$|If - Q_n f| = c \cdot \frac{V(f) \log(n)^d}{n} \quad (7.39)$$

*Beweis:* Koksma-Hlawka Ungleichung im multivariaten Fall, die mehrdimensionale Stern-Diskrepanz der Halton-Folge ist  $O(\frac{\log(n)^d}{n})$   $\square$

Neben der Halton-Folge gibt es einige weitere mehrdimensionale Punktfolgen mit niedriger Diskrepanz, z.B. Faure, Sobol oder Niederreiter-Folgen und Lattice-Regeln.

Als Vergleich: die Diskrepanz einer zufälligen Punktfolge ist

**Theorem 7.2.9 (Diskrepanz einer zufälligen Punktfolge)** Die Stern-Diskrepanz  $D^*$  einer zufälligen Punktfolge  $x_1, \dots, x_N$  ist

$$D^*(x_1, \dots, x_N) = O(\sqrt{\log \log N}) \quad (7.40)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1.

*Beweis:* Gesetz des iterierten Logarithmus.  $\square$

Eigenschaften:

- Monte Carlo: Konvergenzrate  $1/2$ , Quasi-Monte Carlo: Konvergenzrate nahe bei 1
- Die Genauigkeit von Quasi-Monte Carlo-Methoden ist besser als die von Monte Carlo-Methoden, wenn der Integrand glatt und die Dimension  $d$  nicht zu groß ist (Grenze ist etwa bei  $d = 30$ ).
- Um die Vorteile beider Verfahren zu verbinden existieren auch Mischungen aus Monte-Carlo und Quasi-Monte Carlo Methoden (randomisiertes Quasi-Monte Carlo).

### 7.2.5 Broadie-Glasserman Verfahren

Der Broadie-Glasserman Algorithmus erzeugt zur Berechnung des Preises von Amerikanischen Optionen

$$V(S, 0) = \sup_{t \leq T} e^{-rt} E^*(V(S, t)) \quad (7.41)$$

zwei Erwartungswerte für den Optionspreis, einen mit zu hohem Bias und einen mit zu niedrigem Bias. Beide Erwartungswerte besitzen jedoch asymptotisch, wenn die Zahl der Simulationen nach  $\infty$  strebt, keinen Bias. Diese beiden Erwartungswerte dienen als Konfidenzintervall für den Optionspreis.

Zunächst wird ein Zufallsbaum mit  $B$  Zweigen pro Knoten konstruiert (siehe Abbildung 7.2) wobei die Wertpapierpreise zu den Zeitpunkten  $t_j$  mit  $S_j^{i_1, i_2, \dots, i_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  und  $1 \leq i_1 \dots i_j \leq B$  bezeichnet werden. Diese Wertpapierpreise werden in einem Vorwärts-

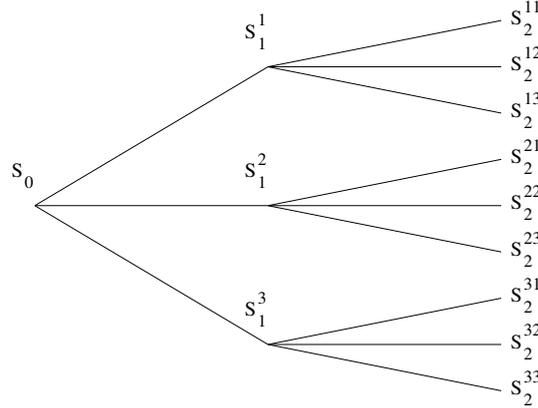


Abbildung 7.2: Simulationsbaum mit drei Zweigen und zwei Zeitschritten.

schrift wie in Abschnitt 5.1 als Random Walk

$$S_{j+1}^{i_1, i_2, \dots, i_{j+1}} = S_j^{i_1, i_2, \dots, i_j} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} z_{i_{j+1}}}$$

für  $i_{j+1} = 1, \dots, B$  simuliert. Hierbei ist  $z_{i_{j+1}}$  eine  $N(0, 1)$ - verteilte Zufallsvariable.

In einem Rückwärtsschritt wird nun (in ähnlicher Weise wie bei der Binomialmethode) zu jedem Knoten  $i_1, i_2, \dots, i_j$  zum Zeitpunkt  $t_j$  der zu hohe Erwartungswert  $\theta_{high, j}^{i_1, i_2, \dots, i_j}$  und der zu niedrige Erwartungswert  $\theta_{low, j}^{i_1, i_2, \dots, i_j}$  aus den Werten des Zeitpunktes  $t_{j+1}$  berechnet. Zum Fälligkeitszeitpunkt  $j = M$  gilt im Fall einer Call Option, dass

$$\theta_{high, M}^{i_1, \dots, i_M} = \theta_{low, M}^{i_1, \dots, i_M} = (S_M^{i_1, \dots, i_M} - K)^+. \quad (7.42)$$

Aus diesen Werten bestimmt man nun rekursiv für  $j = M - 1, \dots, 0$  den zu hohen Erwartungswert durch

$$\theta_{high, j}^{i_1, \dots, i_j} = \max \left\{ (S_j^{i_1, \dots, i_j} - K)^+, e^{-r\Delta t} \frac{1}{B} \sum_{i_{j+1}=1}^B \theta_{high, j+1}^{i_1, \dots, i_j, i_{j+1}} \right\} \quad (7.43)$$

und den zu niedrigen Erwartungswert durch

$$\theta_{low, j}^{i_1, \dots, i_j} = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B \eta_j^{i_1, \dots, i_j, k}. \quad (7.44)$$

Hierbei bestimmt man  $\eta_j^{i_1, \dots, i_j, k}$  für  $k = 1, \dots, B$  mittels

$$\eta_j^{i_1, \dots, i_j, k} = \begin{cases} (S_j^{i_1 \dots i_j} - K)^+ & \text{falls } (S_j^{i_1, \dots, i_j} - K)^+ \geq \frac{1}{B-1} \sum_{\substack{i_{j+1}=1 \\ i_{j+1} \neq k}}^B e^{-r\Delta t} \theta_{low, j+1}^{i_1, \dots, i_j, i_{j+1}} \\ e^{-r\Delta t} \theta_{low, j+1}^{i_1, \dots, i_j, k} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (7.45)$$

Der Optionspreis zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  und Kurs  $S_0$  beträgt dann

$$V(S_0, 0) = \frac{1}{2}(\theta_{high, 0} + \theta_{low, 0}). \quad (7.46)$$

Konvergenzrate:  $1/2$  bei Aufwand  $B^M$ . Vorteile des Broadie-Glasserman-Verfahrens gegenüber die Binomialmethode

- leichtere Generalisierbarkeit
- Anwendbarkeit auf Multi-Asset Optionen ohne den Fluch der Dimension



# Kapitel 8

## PDE-basierte Verfahren

Ausgangspunkt für PDE-basierte Verfahren ist im Falle des Black-Scholes-Modells die bereits bekannte Black-Scholes-PDE für den Optionspreis  $V(S, t)$ :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (8.1)$$

im Gebiet  $[0, T] \times [0, \infty]$  zusammen mit Endbedingungen  $V(S, T)$  zum Zeitpunkt  $t = T$ , die gleich der Auszahlungsfunktion der Option sind, und Randbedingungen  $V(0, t)$  bzw.  $V(\infty, t)$ , die ebenfalls von der Option abhängen.

### 8.1 Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung

Wie in Kapitel 4 gesehen, lässt sich die Black-Scholes-Gleichung als sogenannte Euler-Gleichung (die Potenz von  $S$  als Koeffizient entspricht jeweils dem Grad der Ableitung) in eine einfachere Gleichung, die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (8.2)$$

im Gebiet  $[0, \sigma^2 T/2] \times [-\infty, \infty]$  mittels der Substitutionen

$$S = K \cdot e^x \quad \text{und} \quad t = T - \frac{\tau}{\sigma^2/2} \quad (8.3)$$

transformieren. Damit gilt:

$$V(S, t) = V(K \cdot e^x, T - \frac{\tau}{\sigma^2/2}) =: v(x, \tau) \quad (8.4)$$

und

$$y(x, \tau) := \frac{1}{K} e^{(q-1)x/2 + ((q-1)^2/4 + q)\tau} v(x, \tau) \quad (8.5)$$

mit  $q = 2r/\sigma^2$ . Durch die Umkehrung der Zeitachse werden aus Endbedingungen Anfangsbedingungen, beispielsweise für eine Call-Option:

$$V(S, T) = \max\{S(T) - K, 0\} = K \max\{e^x - 1, 0\} \quad (8.6)$$

und somit

$$y(x, 0) = e^{x(q-1)/2} \max\{e^x - 1, 0\}. \quad (8.7)$$

und analog für eine Put-Option

$$y(x, 0) = e^{x(q-1)/2} \max\{1 - e^x, 0\}. \quad (8.8)$$

Aus den Randbedingungen wird für eine Call-Option

$$y(x, \tau) = 0 \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \quad (8.9)$$

$$y(x, \tau) = (1 - e^{-q\tau-x})e^{(q+1)x/2+(q+1)^2\tau/4} \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad (8.10)$$

und für eine Put-Option

$$y(x, \tau) = e^{(q-1)x/2+(q-1)^2\tau/4} \quad \text{für } x \rightarrow -\infty \quad (8.11)$$

$$y(x, \tau) = 0 \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad (8.12)$$

## 8.2 Diskretisierung

### 8.2.1 Diskretisierungsgitter

Zur numerischen Lösung wird die Wärmeleitungsgleichung auf einem Gitter diskretisiert. Hierzu muss das unendliche Gebiet in  $x$  an den Rändern an Punkten  $x_{\max}$  und  $x_{\min}$  abgeschnitten werden. Hierbei müssen die Abschneidepunkte so gewählt werden, dass  $S_{\min} = Ke^{x_{\min}}$  und  $S_{\max} = Ke^{x_{\max}}$  den interessanten Bereich weit genug abdecken.

Wir überdecken nun das Gebiet  $[x_{\min}, x_{\max}] \times [0, \sigma^2 T/2]$  mit einem äquidistanten Gitter mit Maschenweiten  $\Delta\tau$  und  $\Delta x$ . Die Gitterpunkte seien gegeben als  $(x_i, \tau_j)$  mit

$$x_i = x_{\min} + i\Delta x \quad \text{mit } \Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/M \quad (8.13)$$

sowie

$$\tau_j = j\Delta\tau \quad \text{mit } \Delta\tau = \frac{1}{2}\sigma^2 T/N, \quad (8.14)$$

mit ganzzahligen  $M, N$ ,  $0 \leq i \leq M$  und  $0 \leq j \leq N$ . Die diskrete Lösung der PDE an den Gitterpunkten sei entsprechend  $y_{i,j} = y(x_i, \tau_j)$ . Nachdem die Werte  $y_{i,0}$ ,  $y_{0,j}$  und  $y_{M,j}$  durch die Anfangs- und Randbedingungen vorgegeben sind, sind die Unbekannten hier nur diejenigen  $y_{i,j}$  mit  $1 \leq i \leq M-1$  und  $1 \leq j \leq N$ .

### 8.2.2 Ortsdiskretisierung

Bei sogenannten Finite Differenzen–Verfahren wird die partielle Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung ersetzt. Hierbei werden die kontinuierlichen Ableitungen durch diskrete Ableitungen auf dem Diskretisierungsgitter ersetzt. Für die zweite Ableitung im Ort wird üblicherweise folgende Approximation zweiter Ordnung verwendet:

$$\frac{\partial^2 y(x_i, \tau_j)}{\partial x^2} = \frac{y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (8.15)$$

Es existieren auch Approximationen höherer Ordnung (vorausgesetzt die Lösung ist entsprechend glatt), welche auf weiter entfernte Punkte zugreifen. Insbesondere in der Nähe des Randes stößt man hier jedoch auf Schwierigkeiten und es sind aufwendige Randkorrekturen, welche die Approximationsordnung erhalten, einzusetzen.

### 8.2.3 Zeitdiskretisierung

Nun wollen wir drei Zeitdiskretisierungsverfahren genauer betrachten, die explizite Methode, die implizite Methode und das Crank–Nicolson Verfahren.

#### Explizit

Bei dem einfachsten Verfahren wird die erste Ableitung in der Zeit durch eine Vorwärtsdifferenz ersetzt, d.h.

$$\frac{\partial y(x_i, \tau_j)}{\partial \tau} = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta \tau} + O(\Delta \tau). \quad (8.16)$$

Durch Weglassen der Terme höherer Ordnung ergibt sich mit der Ortsdiskretisierung zusammen:

$$y_{i,j+1} = y_{i,j} + \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2} (y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}). \quad (8.17)$$

Nachdem zur Berechnung der Lösung des Zeitschrittes  $j + 1$  nur auf Lösungen des Zeitschrittes  $j$  zugegriffen werden muß, können die einzelnen Zeitschritte nacheinander beginnend mit  $\tau = \Delta \tau$  berechnet werden, ohne das Gleichungssystem welches durch die Differenzengleichungen in Ort und Zeit definiert ist, explizit lösen zu müssen.

Initialisiere  $y^{(0)}$  nach Formel (22)  
für  $j = 1, 2 \dots N$   
Berechne  $y^{(j)}$  aus Formel (29)

Algorithmus: Das explizite Verfahren.

Das explizite Verfahren hat jedoch einen großen Nachteil, nämlich daß es nur stabil ist, wenn

$$\Delta \tau \leq \frac{\Delta x^2}{2} \quad (8.18)$$

gilt. Dies bedeutet, daß die Zeit- und Ortschrittweiten aneinander gekoppelt sind. Wenn die Ortschaftweite halbiert werden soll (um eine genauere Lösung zu erhalten) muß die Zeitschrittweite gleichzeitig geviertelt werden, wodurch sich der Aufwand insgesamt verachtacht.

### Implizit

Diese Problematik wird durch das implizite Zeitdiskretisierungsverfahren umgangen, indem statt der Vorwärts die Rückwärtsdifferenz verwendet wird, d.h.

$$\frac{\partial y(x_i, \tau_j)}{\partial \tau} = \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{\Delta \tau} + O(\Delta \tau), \quad (8.19)$$

was zusammen mit der Ortsdiskretisierung zum Gleichungssystem

$$y_{i,j-1} + \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2}(y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}) = y_{i,j} \quad (8.20)$$

führt. Sei die Matrix  $G$  definiert als

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

dann läßt sich das implizite Verfahren schreiben als

$$Cy^{(j)} = y^{(j-1)} + e^{(j-1)} \quad (8.22)$$

mit  $C = I + \lambda G$  und  $\lambda = \Delta \tau / \Delta x^2$ . Hierbei ist  $y^{(j)} = (y_{1,j}, \dots, y_{M-1,j})^T$  der Lösungsvektor zum Zeitpunkt  $j$  und  $e^{(j)}$  ein Vektor, der die Randbedingungen zum Zeitpunkt  $j$  reflektiert, also

$$e^{(j)} = \lambda(y_{0,j}, 0, \dots, 0, y_{M,j})^T \quad (8.23)$$

Nachdem wir ein äquidistantes Gitter in Raum und Zeit verwendet haben, ist das zu lösende Gleichungssystem (bis auf die rechte Seite) in jedem Zeitschritt gleich. Durch eine LR-Zerlegung des Tridiagonalsystems in einem Vorverarbeitungsschritt muß in jedem Zeitschritt nur die Vorwärts- und die Rückwärtssubstitution durchgeführt werden (was in  $O(N)$  Operationen ausgeführt werden kann).

Das implizite Verfahren ist im Gegensatz zum expliziten Verfahren für alle Werte von  $\Delta \tau$  stabil.

### Crank–Nicolson

Das implizite Verfahren hat noch den Nachteil, daß es nur von erster Ordnung genau ist (während die Ortsdiskretisierung von zweiter Ordnung ist). Das Crank–Nicolson Verfahren

Berechne die LR-Zerlegung von  $C$   
 Initialisiere  $y^{(0)}$  nach Formel (22)  
 für  $j = 0, 1 \dots N - 1$   
 Löse  $Lz = y^{(j)} + e^{(j)}$   
 Löse  $Ry^{(j+1)} = z$

Algorithmus: Das implizite Verfahren.

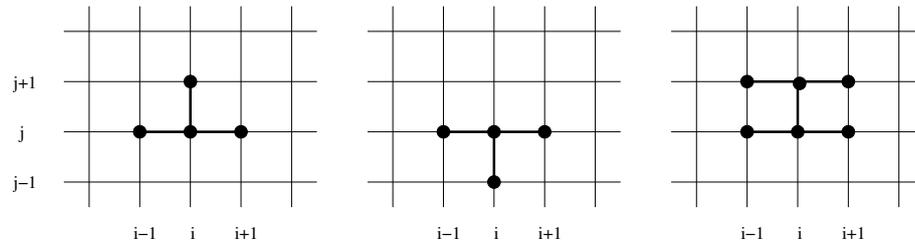


Abbildung 8.1: Das explizite (links), das implizite (mitte) und das Crank–Nicolson–Verfahren (rechts) im Vergleich.

ist auch in der Zeit von zweiter Ordnung genau (wenn die Lösung entsprechend glatt ist). Die Idee hierbei ist, das explizite und implizite Verfahren einfach zu mitteln, also

$$\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta\tau} = \frac{1}{2\Delta x^2} (y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j} + y_{i+1,j+1} - 2y_{i,j+1} + y_{i-1,j+1}). \quad (8.24)$$

Dieses Gleichungssystem kann zusammengefaßt in folgender Form geschrieben werden

$$-\frac{\lambda}{2}y_{i-1,j+1} + (1 + \lambda)y_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}y_{i+1,j+1} = \frac{\lambda}{2}y_{i-1,j} + (1 - \lambda)y_{i,j} + \frac{\lambda}{2}y_{i+1,j}. \quad (8.25)$$

mit  $\lambda$  wie beim impliziten Verfahren. In Matrixschreibweise läßt sich das Crank-Nicolson Verfahren folgendermaßen darstellen

$$Ay^{(j+1)} = By^{(j)} + d^{(j)} \quad (8.26)$$

mit  $A = I + \frac{\lambda}{2}G$  und  $B = I - \frac{\lambda}{2}G$  und der zusätzlichen rechten Seite

$$d^{(j)} = \frac{\lambda}{2}(y_{0,j+1} + y_{0,j}, 0, \dots, 0, y_{N,j+1} + y_{N,j})^T \quad (8.27)$$

welche wiederum die Randbedingungen berücksichtigt.

Wie das implizite Verfahren ist auch das Crank–Nicolson Verfahren für alle Werte von  $\Delta\tau$  stabil.

<p>Berechne die LR-Zerlegung von <math>A</math> Initialisiere <math>y^{(0)}</math> nach Formel (22) für <math>j = 0, 1 \dots N - 1</math>   Berechne <math>c = By^{(j)} + d^{(j)}</math>   Löse <math>Lz = c</math>   Löse <math>Ry^{(j+1)} = z</math></p>
--

Algorithmus: Das Crank–Nicolson Verfahren.

# Literaturverzeichnis