

## 12. Übungsblatt (erschienen am 19.01.2016)

### Aufgabe 12.1 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]

Sei  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $c \in \mathbb{C}^n$ . Die Abbildung  $\Phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  sei definiert durch

$$\Phi(x) = Tx + c.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration  $x^{(k+1)} := \Phi(x^{(k)})$  konvergiert, wenn  $\rho(T) < 1$  ist, wobei  $\rho(T)$  den Spektralradius von  $T$  bezeichnet.
- (b) Weisen Sie für  $\rho(T) > 1$  nach, dass die Fixpunktiteration  $x^{(k+1)} := \Phi(x^{(k)})$  nicht für jeden Startvektor  $x^{(0)}$  konvergiert.

### Aufgabe 12.2 (Votieraufgabe)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei  $x_0 = (1, 1, 1)^T$ . Zeigen Sie, dass das Jacobi-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$  mit dem Startwert  $x_0$  konvergiert, das Gauß-Seidel Verfahren hingegen nicht. Bestimmen Sie den Grenzwert der Jacobi-Iteration.

### Aufgabe 12.3 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]

Sei  $a > 0$  eine beliebige reelle Zahl. Betrachtet wird die Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = \frac{1}{2} \left( x^{(k)} + \frac{a}{x^{(k)}} \right).$$

Zeigen Sie, dass diese für jeden Startpunkt  $x^{(0)} \in (0, \infty)$  gegen  $\sqrt{a}$  konvergiert.

### Aufgabe 12.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Betrachten Sie die mehrdimensionale, stetig differenzierbare Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (\xi, \eta)^\top \longrightarrow \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \xi e^{-\eta^2} + \xi\eta - 6\xi + 3 \\ \log(1 + \eta^2 + \xi^2) - 6\eta - 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Fixpunktaufgabe

$$x = \Phi(x) := x - F'(x)^{-1}F(x), \quad x = (\xi, \eta)^\top, \quad (1)$$

wobei  $F'(x)$  die Jacobi-Matrix von  $F$  bezeichnet. Vergewissern Sie sich, dass diese Fixpunktaufgabe äquivalent ist zu der Fixpunktaufgabe in Aufgabe 11.1. Implementieren Sie die zu (1) gehörige Fixpunktiteration in SCILAB. Das Verfahren soll abbrechen, wenn eine Genauigkeit von  $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-6}$  erreicht worden ist, oder spätestens nach 20 Iterationen. Verwenden Sie als Startwert  $x^{(0)} = (0, -1)^T$  und einen weiteren, beliebigen Startwert. Geben sie den Iterationsverlauf in einer Tabelle aus und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit den Ergebnissen aus Aufgabe 11.4.

## Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben**\* soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 26.01.2016 um 12:00 Uhr in den Kästen ihres Tutors im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Tutor geschickt werden.
- Zu **Programmieraufgaben**\* soll eine kommentierte Ausarbeitung in SCILAB-Code bis zum 26.01.2016 um 12:00 Uhr an ihren Tutor geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**Numerik12\_1516\_Gruppennummer:**" (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile mit "Numerik12\_1516\_3:" beginnen).
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Ausarbeitung verlangt. Diese werden lediglich in der Übung besprochen.
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 12 werden in den Übungen zwischen dem 01.02.2016 und dem 05.02.2016 besprochen.

---

\*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.