GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

11. Übungsblatt (erschienen am 12.01.2016)

Aufgabe 11.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Betrachtet wird die Fixpunktaufgabe $x = \Phi(x), x = (\xi, \eta)^T$, mit

$$\Phi(x) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \xi e^{-\eta^2} + \xi\eta + 3 \\ \log(1+\eta^2+\xi^2) - 1 \end{pmatrix}$$

auf dem Intervall $I = [0,1] \times [-1,1]$.

(a) Weisen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes nach, zeigen Sie, dass die Lipschitzkonstante $L = \frac{5}{6}$ bezüglich der Maximumsnorm ist.
Hinweis: Für eine stetig differenzierbare Funktion $f : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt $|f(t_2) - f(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f'(t)|dt \leq |t_2 - t_1| \max_{t\in[t_1,t_2]} |f'(t)|$.

(b) Es seien $x^{(k)}$ die Iterierten der Fixpunktiteration $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ mit Startvektor $x^{(0)} = (0,0)^T$ und $\hat{x}$ bezeichne den Fixpunkt von Φ auf I. Wieviele Iterationsschritte sind hinreichend, um

$$\|x^{(k)} - \hat{x}\| \leq 10^{-3}$$

garantieren zu können?

Aufgabe 11.2 (Votieraufgabe)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Weisen Sie nach, dass der *Spektralradius* $\rho(A)$,

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } A)\}$$

im Allgemeinen keine Matrixnorm ist. Für welche speziellen Matrizen ist der Spektralradius eine Norm?

Aufgabe 11.3 (Votieraufgabe)

(a) Sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm und $\|\cdot\|$ die davon induzierte Matrixnorm. Zeigen Sie, dass für jede reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ durch $\|x\|_S := \|Sx\|$ eine Vektornorm definiert wird und $\|A\|_S := \|SAS^{-1}\|$ die zugehörige induzierte Matrixnorm ist.

(b) Zu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei $V^{-1}AV = J$ die Jordan-Normalform. Betrachten Sie die Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$ und die Matrix $S = D^{-1}V^{-1}$ mit

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & 0 \\ & \varepsilon^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon^n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Weisen Sie die Ungleichung

$$\|A\|_S \leq \rho(A) + \varepsilon$$

nach.

Aufgabe 11.4 (Programmieraufgabe)[4 Punkte]
Implementieren Sie die Fixpunktiteration aus Aufgabe 1 in `SCILAB`. Das Verfahren soll abbrechen, wenn eine Genauigkeit von $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-6}$ erreicht worden ist, oder spätestens nach 20 Iterationen. Verwenden Sie als Startwert $x^{(0)} = (0, -1)^T$ und einen weiteren, beliebigen Startwert, geben sie den Iterationsverlauf in einer Tabelle aus.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 19.01.2016 um 12:00 Uhr in den Kästen ihres Tutors im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Tutor geschickt werden.

- Zu **Programmieraufgaben*** soll eine kommentierte Ausarbeitung in `SCILAB`-Code bis zum 19.01.2016 um 12:00 Uhr an ihren Tutor geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Numerik11_1516_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile mit "Numerik11_1516_3:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Ausarbeitung verlangt. Diese werden lediglich in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 11 werden in den Übungen zwischen dem 25.01.2016 und dem 29.01.2016 besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**