GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

8. Übungsblatt (erschienen am 01.12.2015)

Aufgabe 8.1 (Votieraufgabe)

(a) Gegeben seien endlich viele Messdaten $t_1, \ldots, t_l \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ und $x_1, \ldots, x_l \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$. Es wird vermutet, dass die Daten x_i in folgender Weise von den Daten t_i abhängen:

$$x(t) = \alpha_0 t^2 + \alpha_1 \pi \sin(2t) + \alpha_2 t \log(t) + \alpha_3,$$

mit gewissen Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Geben Sie das lineare Ausgleichsproblem zur näherungsweisen Bestimmung der Koeffizienten α_i an.

(b) Gehen Sie nun analog für einen vermuteten linearen Zusammenhang $x = a\,t + b$ vor, und bestimmen Sie so die Ausgleichsgerade durch die folgenden Datenpunkte:

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
x	3.72	4.1	5.37	5.9	6.8	7.6	8.0	8.7

Zeichnen Sie die Datenpunkte und die Ausgleichsgerade.

Aufgabe 8.2 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]

Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ eine gegebene Matrix mit $\mathrm{Rang}(A) = n$. Zeigen Sie:

(a) Die Matrix

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}$$

ist regulär.

(b) $\hat{x} \in \mathbb{C}^n$ ist genau dann eine Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\text{minimiere } \|Ax - b\|$$

mit dem Residuum $\hat{r} = b - A\hat{x}$, wenn $(\hat{r}, \hat{x})$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} I & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

löst.

Aufgabe 8.3 (schriftliche Aufgabe)[3 Punkte]
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitisch und positiv definit mit Cholesky-Zerlegung $A = LL^*$. Zeigen Sie, dass für die Matrix L der Cholesky-Zerlegung

$$L = (l_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{cases} \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}\overline{l_{jk}}} & i = j \\ \frac{1}{l_{jj}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\overline{l_{jk}}\right) & i > j \end{cases}$$

gilt und folgern Sie damit die Eindeutigkeit der Cholesky-Zerlegung.

Aufgabe 8.4 (Programmieraufgabe)[4 Punkte]

Implementieren Sie in `SCILAB` die Cholesky-Zerlegung für ein lineares Gleichungssystems der Gestalt

$$Ax = b$$

mit einer positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Testen Sie bitte das Verfahren anhand folgender Daten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 29 & 36 & 43 \\ 3 & 36 & 109 & 126 \\ 4 & 43 & 126 & 246 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 08.12.2015 um 12:00 Uhr in den Kästen ihres Tutors im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Tutor geschickt werden.

- Zu **Programmieraufgaben*** soll eine kommentierte Ausarbeitung in `SCILAB`-Code bis zum 08.12.2015 um 12:00 Uhr an ihren Tutor geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Numerik8_1516_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile mit "Numerik8_1516_3:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Ausarbeitung verlangt. Diese werden lediglich in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 8 werden in den Übungen zwischen dem 14.12.2015 und dem 18.12.2015 besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**