GOETHE UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Numerik Partieller Differentialgleichungen
WS 2015/16
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 4

Abgabe bis Mittwoch, 16.12.

Aufgabe 8: [Finite Elemente in 2D]

Wir betrachten die Poisson-Gleichung im Einheitsquadrat $\Omega = [0,1]^2$

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

(a) Zeigen sie, dass die exakte Lösung dieses Problems gegeben ist durch

$$u(x,y) = \frac{1-x^2}{2} - \frac{16}{\pi^3} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k \text{ ungerade}}} \left[\frac{\sin(k\pi(1+x)/2)}{k^3 \sinh(k\pi)} \left(\sinh \frac{k\pi(1+y)}{2} + \sinh \frac{k\pi(1-y)}{2} \right) \right].$$

Das Gebiet Ω werde nun durch ein äquidistantes Gitter $(x_i, y_j) = (h\cdot i, h\cdot j)$ für $i,j = 0,\ldots,N$ mit Maschenweite $h = 1/N$ in beiden Richtungen diskretisiert. Auf diesem Gitter werden stückweise bilineare Finite-Elemente-Basisfunktionen $\phi_{ij} \in C_0(\Omega)$ wie folgt definiert:

$$\phi_{ij}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad (x,y) = (x_i,y_j) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (x_k,y_l) \text{ für alle } (k,l) \neq (i,j) \end{cases}$$

und ϕ_{ij} ist in jeder Gitterzelle $T_{ij} = [x_i,y_j] \times [x_{i+1},y_{j+1}]$ bilinear, hat also die Form

$$\phi_{ij}(x,y) = a_{ij} + b_{ij}x + c_{ij}y + d_{ij}xy.$$

(b) Geben sie die Hutfunktionen ϕ_{ij} explizit an:

$$\phi_{ij}(x,y) = \phi(x-x_i, y-y_j) = \begin{cases} ? & \text{für} \quad (x,y) \in T_{ij} \\ ? & \text{für} \quad (x,y) \in T_{i+1,j} \\ ? & \text{für} \quad (x,y) \in T_{i,j+1} \\ ? & \text{für} \quad (x,y) \in T_{i+1,j+1} \\ ? & \text{sonst} \end{cases}$$

(c) Berechnen sie die Einträge der Steifigkeitsmatrix $(A)_{(ij),(kl)} = a(\phi_{ij}, \phi_{kl})$:

$$(A)_{(ij),(kl)} = \begin{cases} ? & \text{für} \quad (i,j) = (k,l) \\ ? & \text{für} \quad (i,j) = (k\pm 1,l) \text{ oder } (k,l\pm 1) \\ ? & \text{für} \quad (i,j) = (k\pm 1, l\pm 1) \\ ? & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie die Einträge der rechten Seite $(b)_{ij}$.

(d) Vergleichen sie das resultierende Gleichungssystem $Ax = b$ mit demjenigen, das sich aus einer Finite-Differenzen-Diskretisierung mit zentralen zweiten Differenzen (5-Punkte-Stern) ergibt.

(e) Schreiben sie ein MATLAB-Programm FE2D, das für gegebenes N obiges Gleichungssystem aufstellt und löst.

(f) Zeichnen sie für $N = 32$ die berechnete Näherungslösung u_h aus Aufgabe (d) sowie die exakte Lösung für $k_{\max} = 15$ aus Aufgabe (a).

(g) Ermitteln sie für $N = 2, 4, 8, 16, 32$ und 64 den punktweisen maximalen Fehler

$$\|u - u_h\|_\infty := \max_{i,j=1,\ldots,N-1} |u(x_i,y_j) - u_h(x_i,y_j)|.$$

Plotten sie den Fehler gegen die Maschenweite h in einen doppelt logarithmischen Plot und ermitteln sie so die Konvergenzrate α des Verfahrens der Form $\|u-u_h\|_\infty = c \cdot h^\alpha$.

Punkte: 24