GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

**Numerik Partieller Differentialgleichungen**
**WS 2015/16**
**Prof. Dr. Thomas Gerstner**

# Übung 3

**Abgabe bis Mittwoch, 2.12.**

**Aufgabe 6:** [Upwind-Diskretisierung]

(a) Bestimmen sie die kontinuierliche Lösung für $0 < \varepsilon \leq 1$ von

$$\begin{aligned} -\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad \text{in} \quad (0,1) \quad \text{wobei} \\ u(0) = 0 \quad &\text{und} \quad u(1) = 1 \end{aligned}$$

(b) Zeigen sie, dass

$$\begin{aligned} u(x_i) &= \frac{1 - r^i}{1 - r^N} \quad \text{mit} \\ r &= \frac{2\varepsilon - h}{2\varepsilon + h} \end{aligned}$$

die Lösung des mit zentraler erster ($D^0$) und zweiter ($D^+D^-$) Differenz diskretisierten Problems ist.

(c) Wie groß muss $h$ sein, damit keine Oszillationen auftreten?

(d) Welche Einträge hat das lineare Gleichungssystem, wenn man $D^0$ durch $D^+$ ersetzt?

Punkte: $\boxed{12}$

**Aufgabe 7:** [Shortley-Weller-Diskretisierung]

Es seien $x$ und $x - h$ innere Punkte und $x + sh$ mit $0 < s < 1$ ein Randpunkt. Die Shortley-Weller-Diskretisierung von $u''$ am Punkt $x$ lautet dann

$$u''(x) \approx \frac{2}{h^2} \left( \frac{u(x-h)}{1+s} - \frac{u(x)}{s} + \frac{u(x+sh)}{s(1+s)} \right).$$

(a) Ermitteln sie die Konsistenzordnung dieser Diskretisierung.

Nun sei $\Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $\Omega_h = \{(\frac{2}{3}i - 1, \frac{2}{3}j - 1) \mid i,j = 0,\ldots,3\} \cap \Omega$.

(b) Geben sie die Shortley-Weller-Diskretisierung von $\Delta u$ an den vier inneren Gitterpunkten an.

(c) Stellen sie die zugehörige Diskretisierungsmatrix auf.

(d) Lösen sie die Poisson-Gleichung $\Delta u = -1$ auf $\Omega$ mit $u = 1$ auf $\partial\Omega$ für diese Diskretisierung.

Punkte: $\boxed{12}$