Übung 2

Abgabe bis Mittwoch, 18.11.

Aufgabe 4: [Finite Differenzen]

Der Laplace–Operator ist definiert als

$$-\Delta = -\sum_{i=1}^{d} \partial_{ii} = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

wobei d die betrachtete Dimension ist. Die Diskretisierung des Operators in im Falle $d = 1$ sei

$$-\Delta \doteq -\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}$$

wobei das Diskretisierungsgitter des Intervalls $[a, b]$ durch die $n + 1$ Gitterpunkte $x_j = a + j \cdot \frac{b-a}{n}$ mit $0 \leq j \leq n$ definiert ist und u_j den Funktionswert am Gitterpunkt x_j darstellt.

(a) Beweisen sie, dass die angegebene Diskretisierung die Konsistenzordnung 2 besitzt. Entwickeln sie dazu u_{j+1} und u_{j-1} mittels einer Taylorreihe, die Differenzierbarkeit von u sei bis zum gewünschten Grad stets vorausgesetzt.

(b) Obige Diskretisierung lautet in “Sternnotation” $-h^{-2}[\ 1 \quad -2 \quad 1\ ]$. Wie lautet die Diskretisierung von $-\Delta$ für $d = 2$ in Sternnotation? Zeigen sie auch im 2D-Fall die Konsistenzordnung 2.

(c) Zeigen sie, dass es für den Operator $-\Delta$ nicht möglich ist, eine Diskretisierung der Konsistenzordnung 3 zu konstruieren, welche die Sternnotation $[\ \alpha \quad \beta \quad \gamma\ ]$ besitzt.

Punkte: $\boxed{9}$

Aufgabe 5: [Systemmatrizen für Finite Differenzen]

Wir betrachten die d-dimensionale Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Randbedigungen

$$-\Delta u = f \text{ auf } \Omega \text{ mit } u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

auf dem Einheitsquadrat $\Omega = [0, 1]^d$. Zur Diskretisierung verwenden wir eine Zerlegung von Ω durch ein uniformes Gitter der Maschenweite $h = 1/N$ mit $N \in \mathbb{N}$ Punkten in jeder Richtung.

(a) Leiten sie für $d \in \{1, 2, 3\}$ das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$ für die Finite-Differenzen-Diskretisierung der Poisson-Gleichung basierend auf zentralen zweiten Differenzen her.

(b) Wie viele Einträge ungleich Null hat die Systemmatrix $\mathbf{A}$ in Abhängigkeit von N und d?

(c) Beweisen sie, dass die gefundenen Systemmatrizen $\mathbf{A}$ für $N, d \in \mathbb{N}$ invertierbar sind.

Punkte: $\boxed{12}$

Gesamtpunktzahl: 21 Punkte