Übung 8

Abgabe bis Mittwoch, 16.12.

Aufgabe 1: [Monte Carlo Methode]

Mit der Monte Carlo Methode lässt sich ein Integral auf folgende Weise schätzen

$$\int_{[0,1]^d} g(x)dx \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(x_i),$$

wobei $x_i \sim U[0,1]^d$, also gleichverteilt auf $[0,1]^d$ sind.
Sei $V(S,0)$ der heutige Preis einer asiatischen Call-Option mit geometrischem Mittel über zwei Zeitpunkte, das heißt

$$V(S,T) = (\sqrt{(S(T/2)\cdot S(T)} - K)^+.$$

.

(a) Bestimmen sie die Funktionen $f(x,y)$ und $g(x,y)$ für die gilt

$$V(S,0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy$$

sowie

$$V(S,0) = \int_0^1\int_0^1 g(x,y)dxdy.$$

und geben Sie den Monte Carlo Schätzer für das letzte Integral an.

(b) Leiten Sie mit Hilfe des Integrals aus a) eine geschlossene Lösungsformel für diese Option her.

Punkte: $\boxed{16}$

Aufgabe 2: [Varianz]

Der Fehler einer Monte-Carlo-Simulation lässt sich über die Varianz der berechneten Ergebnisse abschätzen. Ein Schätzer für die Varianz von M Zahlen $x_1,\dots,x_M$ ist

$$s_M^2 := \frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(x_i-\bar{x})^2, \quad \text{mit } \bar{x} := \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_i$$

oder alternativ

$$s_M^2 := \frac{1}{M-1}\left(\sum_{i=1}^{M} x_i^2 - \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{M} x_i\right)^2\right).$$

Es kann auch der folgende rekursive Algorithmus verwendet werden:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 := x_1, \beta_1 := 0\\
&\text{für } i = 2,\dots,M:\\
&\alpha_i := \alpha_{i-1} + \frac{x_i - \alpha_{i-1}}{i}\\
&\beta_i := \beta_{i-1} + \frac{(i-1)(x_i-\alpha_{i-1})^2}{i}
\end{aligned}$$

Zeige sie, dass gilt: $\bar{x} = \alpha_M$ und $s_M^2 = \frac{\beta_M}{M-1}$.

Punkte: $\boxed{8}$

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte