GOETHE UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Computational Finance
WS 15/16
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 7

Abgabe bis Mittwoch, 9.12.

Aufgabe 1: [Trinomialbaum]

(a) Geben sie analog zum Algorithmus der Binomialmethode einen Algorithmus für die Trinomialmethode zur Bewertung Amerikanischer Optionen an.

(b) Berechnen sie damit in einem zweiperiodigen Baum den Preis einer Amerikanischen Put-Option mit folgenden Parametern: $S(0) = 100$, $K = 105$, $u = 1.25$, $d = 0.8$, $T = 1$ und $r = 0.05$.

Punkte: $\boxed{10}$

Aufgabe 2: [Brownsche Brücke]
Für einen Wiener Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ betrachte

$$X_t := W_t - \frac{t}{T} W_T \quad \text{für } 0 \leq t \leq T.$$

Berechnen sie $\mathrm{Var}(X_t)$ und zeigen sie, dass

$$\sigma \sqrt{t\left(1 - \frac{t}{T}\right)} Z \quad \text{mit } Z \sim N(0,1)$$

eine Realisierung von X_t mit Volatilität σ ist.

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 3: [Box-Muller-Methode]
Zeigen Sie, dass für auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahlen u_1 und u_2 die Zufallszahlen

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{-2\ln u_1}\cos(2\pi u_2) \\ z_2 &= \sqrt{-2\ln u_1}\sin(2\pi u_2) \end{aligned}$$

standardnormalverteilt sind.

Hinweis: Schreiben Sie das Paar (z_1, z_2) in Polarkoordinaten und verwenden Sie danach die Inversionsmethode.

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 4: [Programmieraufgabe]

(a) Schreiben Sie eine Funktion *normal(n)*, die mit Hilfe der Box-Muller-Methode einen Vektor mit $2n$ standardnormalverteilten Zufallsvariablen ausgibt (der Matlabbefehl *rand()* zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen darf verwendet werden).

(b) Schreiben Sie zwei Funktionen *RW(n,T)* und *BB(n,T)*, die einen über die Zeit T in 2^n Schritten diskretisierten Wiener Prozess ausgeben und verwenden Sie dabei die Funktion aus Aufgabenteil a). Benutzen Sie für die Funktion RW das Verfahren des Random Walks und für die Funktion BB die Methode der Brownschen Brücke.

(c) Schreiben Sie eine Funktion *geomBB(n,m,S0,mu,sigma,T,wiener)*, die ihnen m Pfade mit 2^n Zeitschritten über die Zeit T einer Aktie im Black-Scholes-Modell (geometrisch Brownsche Bewegung) mit Parametern μ und σ und Startwert $S0$ simuliert. Der Eingabewert *wiener* steht für die zwei Verfahren zur Erstellung des Wiener Prozesses aus Aufgabenteil b) (0 = RW und 1 = BB). Die Ausgabe soll eine $(m, 2^n+1)$-Matrix mit allen Aktienpfaden sein.

(d) Rufen sie die Funktionen *geomBB(5,3,1,0.2,0.3,2,0)* und *geomBB(5,3,1,0.2,0.3,2,1)* auf und plotten Sie die 3 Pfade in je einer Grafik.

Punkte: $\boxed{10}$

Gesamtpunktzahl: 32 Punkte