GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

7. Übungsblatt (erschienen am 24.11.2015)

Aufgabe 7.1 (Votieraufgabe)

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm in $\mathbb{C}^n$. Zeigen Sie:

(a) Durch
$$\|A\|_{\text{ind}} := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}$$
wird eine Matrixnorm in $\mathbb{C}^{n\times n}$, die sogenannte *induzierte Norm* definiert.

(b) Die induzierte Norm ist mit der Ausgangsnorm verträglich und submultiplikativ.

(c) Für jede andere mit der Ausgangsnorm verträgliche Norm $\|\cdot\|_{\text{subm}}$ in $\mathbb{C}^{n\times n}$ gilt
$$\|A\|_{\text{ind}} \leq \|A\|_{\text{subm}} \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Aufgabe 7.2 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Zeigen Sie:

(a) Die Spaltensummennorm ist die durch die Betragssummennorm induzierte Norm.

(b) Die Zeilensummennorm ist die durch die Maximumsnorm induzierte Norm.

(c) Die Frobeniusnorm ist mit der Euklid-Norm verträglich, jedoch wird die Frobeniusnorm nicht durch die Euklid-Norm induziert.

(d) Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ reguläre Matrizen und $\|\cdot\|_M$ eine Matrixnorm. Zeigen Sie:

(i) $\text{cond}_M(AB) \leq \text{cond}_M(A) \cdot \text{cond}_M(B)$ für jede submultiplikative Matrixnorm.

(ii) $\text{cond}_M(cA) = \text{cond}_M(A)$ für alle $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 7.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Betrachtet wird die in Abbildung 1 dargestellte Anordnung von Federn und Kugeln.
Bezeichne x_i, $i = 1, \ldots, 4$, die Auslenkung der i-ten Kugel aus der Ruhelage nach rechts und v_i ihre Geschwindigkeit, wobei $v_i > 0$ eine Bewegung nach rechts bedeutet. Durch die Federkräfte ändert sich im Zeitraum Δt beispielsweise die Geschwindigkeit der zweiten Kugel gemäß
$$v_2^{\text{neu}} = v_2^{\text{alt}} + \Delta v_2 \quad \text{mit} \quad \Delta v_2 = k(x_1 - x_2)\Delta t + k(x_3 - x_2)\Delta t,$$

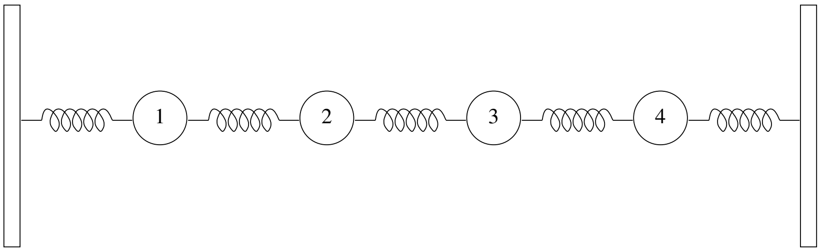

Abbildung 1: Anordnung von Federn und Kugeln.

wobei k von der Stärke der Feder und der Masse der Kugel abhängt und hier als konstant angenommen wird. Die Position der zweiten Kugel ändert sich gemäß

$$\Delta x_2 = x_2^{\text{neu}} - x_2^{\text{alt}} = v_2 \Delta t.$$

Stellen Sie für die anderen Kugeln entsprechende Gleichungen für Δx_i und Δv_i auf und fassen Sie diese in einem linearen Gleichungssystem der Form

$$\Delta \eta = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta x_4 \\ \Delta v_4 \end{pmatrix} = \Delta t A \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ x_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \Delta t A \eta, \quad A \in \mathbb{R}^{8\times 8}, \tag{1}$$

zusammen. Zur Berechnung von

$$\eta^{\text{neu}} = \eta^{\text{alt}} + \Delta \eta$$

kann in der rechten Seite von (1) entweder η^{alt} oder η^{neu} verwendet werden. Im zweiten Fall muss die Gleichung dann noch nach η^{neu} aufgelöst werden. Dazu sollte einmalig eine LR-Zerlegung der zu invertierenden Matrix mit dem `SCILAB`-Befehl `lu` berechnet werden, und die Lösungen sukzessiv wie in der Vorlesung in Bemerkung 2.3 beschrieben berechnet werden.
Implementieren Sie beide Möglichkeiten und testen Sie sie jeweils für 300 Zeitschritte $\Delta t = 0.05$ mit der Anfangsvorgabe $\eta = (0.3,\ 0,\ -0.3,\ 0,\ 0.3,\ 0,\ -0.3,\ 0)^T$ und $k = 1$.
Visualisieren und interpretieren Sie ihre Ergebnisse. Dabei kannn die unten angegebene Funktion `F(j)=Zeichne(eta)` verwendet weden. Diese zeichnet gerade das Ergebnis zu einem Zeitschritt.
Hinweis: Die `SCILAB`-Funktion `sleep` kann ebenfalls hilfreich sein.

```
function [f] = Zeichne(eta)
  f = figure(1);
  drawlater();
  a = gca(); set(gca(),"data_bounds",[0,10,-5,5]); set(gca(),"tight_limits","on");
  if ~isempty(a.children)
    delete(a.children) // falls es schon einen plot gibt, so wird dieser gelöscht.
  end
  [x01,y01]=MaleFeder(0,2+eta(1));
  [x12,y12]=MaleFeder(2+eta(1),4+eta(3))
  [x23,y23]=MaleFeder(4+eta(3),6+eta(5))
  [x34,y34]=MaleFeder(6+eta(5),8+eta(7))
  [x45,y45]=MaleFeder(8+eta(7),10)
  plot([x01, x12, x23, x34, x45],[y01, y12, y23, y34, y45])
  plot([2,4,6,8]+eta([1,3,5,7])' , zeros(1,4),"linest","none","marker",...
  "o","markersize",20,"markeredge","blue","markerface","red")
```

```
  drawnow();
endfunction

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [x,y]=MaleFeder(a,b)
  x=[a linspace(a+0.35,b-0.35,10) b];
  y=[0 0 1 -1 1 -1 1 -1 1 -1 0 0]/5;
endfunction
```

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 01.12.2015 um 12:00 Uhr in den Kästen ihres Tutors im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Tutor geschickt werden.

- Zu **Programmieraufgaben*** soll eine kommentierte Ausarbeitung in `SCILAB`-Code bis zum 01.12.2015 um 12:00 Uhr an ihren Tutor geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Numerik7_1516_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile mit "Numerik7_1516_3:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Ausarbeitung verlangt. Diese werden lediglich in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 7 werden in den Übungen zwischen dem 07.12.2015 und dem 11.12.2015 besprochen.

---

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**