

## Übung 4

Abgabe bis Mittwoch, 18.11.

**Aufgabe 1:** [Anfangs- und Randbedingungen im PDE-Ansatz]

Die Payofffunktionen einer Digitalen Call- und Put-Option ist gegeben durch

$$P_{Call}(S(T)) = \mathbf{1}_{\{S(T) > K\}}, \quad P_{Put}(S(T)) = \mathbf{1}_{\{S(T) < K\}}.$$

Bestimmen sie für beide Optionen die Anfangs- und Randbedingungen im Black-Scholes Modell für den PDE-Ansatz.

Punkte:

**Aufgabe 2:** [Lösung der Wärmeleitungsgleichung]

Zeigen sie durch Einsetzen, dass

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) e^{-(x-y)^2/4kt} dy$$

die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ in } \Omega = [-\infty, \infty] \times [0, \infty]$$

für eine gegebene (entsprechend integrierbare) reelle Funktion  $u_0$  löst.

Punkte:

**Aufgabe 3:** [Martingalansatz]

Bestimmen sie mit Hilfe des Martingalansatzes den Preis  $V(S, 0)$  der folgenden beiden Digitalen Optionen unter dem Black-Scholes Modell:

(a) **Cash-or-Nothing Call** mit Auszahlungsfunktion

$$V(S, T) = \begin{cases} 1 & \text{falls } S(T) \geq K, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) **Asset-or-Nothing Call** mit Auszahlungsfunktion

$$V(S, T) = \begin{cases} S(T) & \text{falls } S(T) \geq K, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Punkte:

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte