4. Übungsblatt (erschienen am 03.11.2015)

Aufgabe 4.1 (Votieraufgabe)

Es sei $w \in C([a,b])$ eine Gewichtsfunktion, $w(x) > 0$ für $x \in (a,b)$, und $\omega \in \Pi_m \setminus \Pi_{m-1}$ ein Polynom m-ten Grades für das die Gleichung

$$\int_a^b \omega(x)p(x)w(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

für alle Polynome $p \in \Pi_{m-1}$ gelte. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass ω dann ausschließlich reelle Nullstellen hat. Zeigen Sie, dass die Nullstellen überdies paarweise verschieden sind und in (a,b) liegen.

Aufgabe 4.2 (Votieraufgabe)

Es seien $f, g \in C([-1,1])$ und $w \in C([-1,1])$ eine Gewichtsfunktion, das heißt, $w(x) > 0$ für alle $x \in (-1,1)$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^1 w(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf $C([-1,1])$ definiert wird. Weisen Sie dies auch für die Funktion $w(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nach.

(b) Durch $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ wird eine Norm auf $C([-1,1])$ definiert. Seien $h_1, h_2, \ldots, h_n$ paarweise orthogonal, es sei also $\langle h_i, h_j\rangle = 0$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass der Satz des Pythagoras

$$\|h_1 + \cdots + h_n\|^2 = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 + \cdots + \|h_n\|^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 4.3 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]

Das n-te *Tschebyscheff-Polynom*, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ ist gegeben durch

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

(a) Weisen Sie nach, dass für $n \geq 1$ die Drei-Term-Rekursion $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ gilt mit $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$, und es sich bei T_n tatsächlich um ein Polynom vom Grad n handelt.

(b) Zeigen Sie, dass die $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich des Skalarproduktes $\langle p, q\rangle := \int_{-1}^1 p(x)q(x)w(x)\,\mathrm{d}x$ mit der Gewichtsfunktion $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ paarweise orthogonal sind. Wie lautet die entsprechende Orthonormalbasis?

Aufgabe 4.4 (schriftliche und Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Die *Gauß-Tschebyscheff-Quadraturformel*

$$G_m[f] = \sum_{j=1}^{m} w_j f(x_j) \approx \int_{-1}^{1} f(x)w(x)\,\mathrm{d}x =: I[f;w]$$

ist die eindeutig bestimmte Quadraturformel zur Gewichtsfunktion $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ mit maximalem Exaktheitsgrad $q = 2m - 1$.

(a) Bestimmen Sie die Knoten x_j, $j = 1, \ldots, m$.

(b) Zeigen Sie, dass für die Gewichte gilt $w_j = \frac{\pi}{m}$, für $j = 1, \ldots, m$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Aus der Exaktheitsforderung

$$G_m[T_k] = I[T_k; w] \quad \text{für } k = 0, \ldots, 2m-1$$

ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, wobei T_k das k-te Tschebyscheff-Polynom aus Aufgabe 3 bezeichnet.

2. Benutzen Sie die geometrische Summenformel, um zu zeigen, dass für $k \neq 0$

$$\sum_{j=1}^{m} e^{ik\pi\frac{2j-1}{2m}} = \begin{cases} \frac{i}{\sin\left(\frac{k}{2m}\pi\right)}, & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{für } k \text{ gerade,} \end{cases}$$

gilt (i bezeichne die imaginäre Einheit) und lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem.

(c) Schreiben Sie eine `SCILAB`-Funktion, welche mittels der Gauß-Tschebyscheff-Quadratur für $n =$ 10, 100,1000 Stützstellen das Integral

$$\int_{-1}^{1} \log_{10}(1-x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\pi \log_{10}(2)$$

berechnet, und vergleichen Sie den berechnenten mit dem exakten Wert.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 10.11.2015 um 12:00 Uhr in den Kästen ihres Tutors im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Tutor geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Numerik4_1516_schriftlich:"**.

- Zu **Programmieraufgaben*** soll eine kommentierte Ausarbeitung in `SCILAB`-Code bis zum 10.11.2015 um 12:00 Uhr an ihren Tutor geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Numerik4_1516_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile mit "Numerik4_1516_3:"beginnen).

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Ausarbeitung verlangt. Diese werden lediglich in der Übung besprochen.

- Alle Aufgaben von Übungsblatt 4 werden in den Übungen zwischen dem 16.11.2015 und dem 20.11.2015 besprochen.

***Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.**