GOETHE UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Computational Finance
WS 15/16
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 3

Abgabe: 10.11.2015

Aufgabe 1:

Sei $\{W_t, 0 \leq t < \infty\}$ ein Wiener Prozess. Zeigen sie mit Hilfe der Itô-Formel, dass:

(a) $X_t = \exp(W_t - \frac{1}{2}t)$ löst $dX_t = X_t dW_t$.

(b) $X_t = \exp(2W_t - t)$ löst $dX_t = X_t dt + 2X_t dW_t$.

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 2:

Sei $\{W_t, 0 \leq t < \infty\}$ ein Wiener Prozess. Zeigen Sie mit Hilfe der Itô-Formel das

$$d(\cos(W_t)) = -\frac{1}{2}\cos(W_t)\,dt - \sin(W_t)\,dW_t$$

und

$$d(\sin(W_t)) = -\frac{1}{2}\sin(W_t)\,dt + \cos(W_t)\,dW_t$$

gilt.

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 3:

Sei $\{W_t, 0 \leq t < \infty\}$ ein Wiener Prozess und sei

$$m_k(t) := E(W_t^k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Itô-Formel

$$m_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t m_{k-2}(s)\,ds$$

für $k \geq 2$.

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 4:

Betrachten sie Zahlen $u, d, p, \beta, \mu, \sigma, \Delta t, T$ und n mit

$$u = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}, \beta = \frac{1}{2}(e^{-\mu \Delta t} + e^{(\mu+\sigma^2)\Delta t}),\ ud = 1,\ T = n\Delta t,\ p = \frac{e^{\mu \Delta t} - d}{u - d}$$

und zeigen sie

(a) $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} np(1-p)\left(\ln \frac{u}{d}\right)^2 = \sigma^2 T$

(b) $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} n\left(p \ln \frac{u}{d} + \ln d\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T$

(c) $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{2p-1}{\sqrt{\Delta t}} = \frac{2r - \sigma^2}{2\sigma}$

und damit, dass das Binomialmodell für diese Parameter für $\Delta t \to 0$ gegen das Black-Scholes-Modell mit Drift μ und Volatilität σ konvergiert.

Hinweis: Es ist hilfreich die Beziehungen

$$d = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1},\ u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},\ d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

zu benutzen sowie am Anfang zu zeigen, dass $\lim_{\Delta t \to 0} p = \frac{1}{2}$ gilt.

Punkte: $\boxed{12}$

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte