Numerik Partieller Differentialgleichungen
WS 2015/16
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 1

Abgabe bis Mittwoch, 4.11.

Aufgabe 1: [Klassifikation partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung]

Bestimmen sie den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen für alle Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$. Im Falle gemischten Typs skizzieren sie die Bereiche, in denen die Gleichung elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch ist.

(a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

(b) $3\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$

(c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + 4u - x^2 y = 0$

Punkte: $\boxed{9}$

Aufgabe 2: [Lösung der Wärmeleitungsgleichung]

Zeigen sie durch Einsetzen, dass

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) e^{-(x-y)^2/4kt}\, dy$$

die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ in } \Omega = [-\infty, \infty] \times [0, \infty]$$

für eine gegebene (entsprechend integrierbare) reelle Funktion u_0 löst.

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 3: [Numerische Differentiation]

Die erste Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}$ kann wie folgt diskretisiert werden:

$$\begin{aligned}
(D^+u)(x) &= \frac{1}{h}[u(x+h) - u(x)] && \text{Vorwärtdifferenz} \\
(D^-u)(x) &= \frac{1}{h}[u(x) - u(x-h)] && \text{Rückwärtsdifferenz} \\
(D^0u)(x) &= \frac{1}{2h}[u(x+h) - u(x-h)] && \text{Symmetrische Differenz.}
\end{aligned}$$

(a) Zeigen sie: D^+D^- ist eine Diskretisierung für die zweite Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

(b) Zeigen sie: $D^-D^+ = D^+D^-$.

(c) Sind auch D^+D^0, D^-D^0, D^0D^+ und D^0D^- Diskretisierungen für die zweite Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$?

Punkte: $\boxed{6}$

Gesamtpunktzahl: 21 Punkte