GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

3. Übungsblatt (erschienen am 27.10.2015)

Aufgabe 3.1 (schriftliche Aufgabe)[2 Punkte]

Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ werde das Integral $I[f] := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ approximiert durch die Näherung

$$Q[f] := \sum_{i=1}^{m} w_i f(x_i) \tag{1}$$

mit Gewichten

$$w_i := \int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

wobei l_i das i-te Lagrange-Polynom bezeichnet und Stützstellen $a \leq x_1 < \cdots < x_m \leq b$, $m \geq 1$ verwendet werden. Zeigen Sie, dass für die Gewichte w_i gilt

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = b - a.$$

Aufgabe 3.2 (schriftliche Aufagbe)[4 Punkte]

Zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $I[f] = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ werden die abgeschlossenen Newton-Cotes Formeln (1), (2) mit einer ungeraden Anzahl $m = 2l+1$, $l \in \mathbb{N}$, äquidistanter Knoten betrachtet.

(a) Vergewissern Sie sich, dass $x_{m+1-i} = -x_i$ für $i = 1, \ldots, m$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Gewichte symmetrisch sind, dass also $w_{m+1-i} = w_i$, für $i = 1, \ldots, m$, gilt.

(c) Man zeige für diesen Spezialfall, dass die Newton-Cotes Formeln mit ungerader Anzahl Knoten $m = 2l + 1$ sogar Exaktheitsgrad $q = m$ haben.

Aufgabe 3.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

Basierend auf der zusammengesetzten Trapezformel und der Simpsonformel soll ein adaptives Quadraturverfahren zur Berechnung von

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

implementiert werden. Die Idee eines adaptiven Verfahren ist es, die Schrittweite nur in solchen Bereichen zu verfeinern, in denen sich die Funktionswerte schnell ändern. Der Algorithmus soll rekursiv arbeiten: Zunächst wird für $h = (b-a)/2$ das Integral nach der Trapezformel T_2 und der Simpsonformel S_1 berechnet. Wird die Genauigkeit $|T_2 - S_1| \leq \texttt{tol}$ erreicht, wobei `tol` vorgegeben ist, so soll S_1

als Näherung für $I[f]$ verwendet werden und der Algorithmus soll abbrechen. Wird diese Genauigkeit nicht erreicht, so soll das Integrationsintervall und die Genauigkeit `tol` halbiert werden, und die oben beschriebene Methode zur Berechnung der Integrale $\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ wiederholt werden. Implementieren Sie den Algorithmus mit einer sich selbst rekursiv aufrufenden Funktion

```
[Q, AnzF] = QuadAdapt(funkt,tol,a,b,fa,fab,fb),
```

wobei `a,b` die Integrationsgrenzen bezeichnen und `fa, fb, fab` jeweils die Funktionswerte $f(a)$, $f(b)$ und $f(\frac{1}{2}(a+b))$ enthalten. In `Q` wird der Näherungswert für $I[f]$ und in `AnzF` die Anzahl der Funktionsauswertungen von f zurückgegeben.

Veranschaulichen Sie das Konvergenzverhalten dieser adaptiven Quadraturmethode, indem Sie zur Berechnung von $I[f] = \int_{0.1}^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ den Fehler der numerischen Integration gegen die Anzahl der Funktionsauswertungen darstellen, und vergleichen Sie dies mit den Ergebnissen für die zusammengesetzte Trapezformel.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 03.11.2015 um 12:00 Uhr in den Kästen ihres Tutors im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Tutor geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Numerik3_1516_schriftlich:"**.
- Zu **Programmieraufgaben*** soll eine kommentierte Ausarbeitung in `SCILAB`-Code bis zum 03.11.2015 um 12:00 Uhr an ihren Tutor geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit **"Numerik3_1516_Gruppennummer:"** (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile mit "Numerik3_1516_3:"beginnen).
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 3 werden in den Übungen zwischen dem 09.11.2015 und dem 13.11.2015 besprochen.

*__Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.__