

2. Übungsblatt (erschienen am 20.10.2015)

Aufgabe 2.1 (schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Die *Hermite-Interpolationsaufgabe* besteht darin, zu vorgegebenen Knoten x_1, \dots, x_m neben Funktionswerten $f(x_1), \dots, f(x_m)$ auch die Werte der Ableitung $f'(x_1), \dots, f'(x_m)$ miteinzubeziehen. Wir wollen ein Polynom p vom Grad $2m - 1$ so bestimmen, dass

$$p(x_i) = f(x_i) \quad \text{und} \quad p'(x_i) = f'(x_i) \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, m \quad \text{gilt.}$$

- (a) Zeigen Sie, dass höchstens ein solches Polynom $p \in \Pi_{2m-1}$ existiert.
(b) Konstruieren Sie die Polynome $q_i, r_i \in \Pi_{2m-1}$ mit den Eigenschaften

$$q_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad q_i'(x_j) = 0, \quad (1)$$

$$r_i(x_j) = 0, \quad r_i'(x_j) = \delta_{ij}, \quad (2)$$

für $i, j = 1, \dots, m$ und geben Sie damit die Lösung der Hermite-Interpolationsaufgabe explizit an. Zeigen Sie dazu, dass die Polynome

$$q_i(x) = (\alpha_i x + \beta_i) l_i^2(x) \quad \text{und} \quad r_i(x) = (\tilde{\alpha}_i x + \tilde{\beta}_i) l_i^2(x)$$

mit geeigneten Koeffizienten $\alpha_i, \tilde{\alpha}_i, \beta_i, \tilde{\beta}_i \in \mathbb{R}$ die Bedingungen (1) bzw. (2) erfüllen; hierbei sind l_i die Lagrange-Grundpolynome. Berechnen Sie die Koeffizienten $\alpha_i, \tilde{\alpha}_i, \beta_i, \tilde{\beta}_i \in \mathbb{R}$ ohne die Ableitung der Lagrange-Grundpolynome explizit auszurechnen.

- (c) Bestimmen Sie das Hermite-Interpolationspolynom für $x_1 = 0, x_2 = \pi/2, p(x_1) = f(x_1), p(x_2) = f(x_2)$ sowie $p'(x_1) = f'(x_1), p'(x_2) = f'(x_2)$ mit $f(x) = \cos x$.

Aufgabe 2.2 (Votieraufgabe)

Gegeben seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sowie $y_1, y_2, y_2', y_3 \in \mathbb{R}$. Wir definieren $x_1 := a, x_2 := (a + b)/2$ und $x_3 := b$. Zeigen Sie, dass ein Interpolationspolynom $p \in \Pi_3$ existiert mit $p(x_1) = y_1, p(x_2) = y_2, p'(x_2) = y_2'$ und $p(x_3) = y_3$.

Aufgabe 2.3 (Votieraufgabe)

Sei $I[f; w] = \int_0^1 w(x) f(x) dx$ mit $w(x) = \sqrt{x}$. Betrachten Sie die Quadraturformel

$$Q[f] = w_1 f(x_1).$$

Finden Sie ein Gewicht w_1 und x_1 so, dass $Q[\cdot]$ maximalen Exaktheitsgrad q hat.

Aufgabe 2.4 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]

- (a) Schreiben Sie eine SCILAB-Funktion, die eine Funktion für äquidistante Stützstellen $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ und vorgegebene Funktionswerte $f(x_1), \dots, f(x_m)$ auf dem Intervall $[x_1, x_m]$ mittels eines Polynomes vom Grade $m - 1$ interpoliert. Verwenden Sie die Vandermonde Matrix um die Koeffizienten des Polynoms auszurechnen.
Hinweis: Ein Gleichungssystem $Ax = b$ löst SCILAB mit dem Befehl $x = A \setminus b$. Siehe auch `backslash` in der SCILAB-Hilfe.
- (b) Interpolieren Sie eine der Funktionen `exp`, `sin` auf dem Intervall $[-5, 5]$ mit Polynomen vom Grad 5 und 10. Geben Sie die Interpolationspolynome und den Graph der zu interpolierenden Funktion in einem einzigen Plot aus.
Hinweis: Die SCILAB-Funktionen `poly` und `hoerner` sind hier hilfreich.
- (c) Von Runge ist das Beispiel $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Was beobachtet man, wenn man das Interpolationspolynom zu dieser Funktion auf dem Intervall $[-5, 5]$ für verschiedene Anzahlen von Stützstellen darstellt?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben*** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 27.10.2015 um 12:00 Uhr in den Kästen ihres Tutors im 3. Stock der Robert-Mayer-Str. 6-8 abzugeben ist. Sollte ein Übungstermin nicht wahrgenommen werden können, so kann die Abgabe der schriftlichen Aufgabe auch bis zum obigen Zeitpunkt an ihren Tutor geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**Numerik2_1516_schriftlich:**".
- Zu **Programmieraufgaben*** soll eine kommentierte Ausarbeitung in SCILAB-Code bis zum 27.10.2015 um 12:00 Uhr an ihren Tutor geschickt werden. Bitte beginnen Sie die Betreffzeile Ihrer E-Mail mit "**Numerik2_1516_Gruppennummer:**" (wenn Sie z.B. in Gruppe 3 sind, so soll die Betreffzeile mit "Numerik2_1516_3:" beginnen).
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Ausarbeitung verlangt. Diese werden lediglich in der Übung besprochen.
- Alle Aufgaben von Übungsblatt 2 werden in den Übungen zwischen dem 02.11.2015 und dem 06.11.2015 besprochen.

*Die Abgabe und Bearbeitung darf in Zweiergruppen erfolgen.