



Übung 1

Abgabe bis Dienstag, 27.10.2015

Aufgabe 1: [Verzinsung]

Der Betrag $B(0) = 500$ Euro wird zu einer jährlichen Zinsrate $r = 10\%$ für 3 Jahre angelegt.

- Berechnen sie den Wert der Anlage $B(t)$ nach $t = 3$ Jahren bei einfacher, zweifacher und kontinuierlicher Verzinsung.
- Schätzen sie die Differenz zwischen m -facher und kontinuierlicher Verzinsung ab und ermitteln sie so dasjenige m , für welches diese Differenz unter 0.1% liegt.
- Wie verhält sich diese Differenz in Abhängigkeit von der Zinsrate r und der Laufzeit t .

Punkte: 5

Aufgabe 2: [Variable Verzinsung]

- Zeigen sie mittels der gewöhnlichen Differentialgleichung $\frac{dB(t)}{dt} = r(t)B(t)$, dass für den Wert einer Anlage von $B(0)$ mit variabler Zinsrate $r(t)$ bei kontinuierlicher Verzinsung zum Zeitpunkt $t > 0$ gilt:

$$B(t) = B(0)e^{\int_0^t r(s)ds}.$$

- Ermitteln sie den Wert einer Anlage mit variablem (Jahres-)Zins $r(t) = \frac{t}{1+t^4}$ für ein Investment von $B(0) = 1000$ Euro nach $t = 2$ Jahren bei kontinuierlicher Verzinsung.
- Ermitteln sie den Wert der Anlage aus Teilaufgabe (b) bei einfacher Verzinsung pro Jahr.
- Ermitteln sie den Wert der Anlage aus Teilaufgabe (b), wenn das Integral im Exponenten durch die Simpsonregel näherungsweise berechnet wird.
- Schätzen sie für die Zinsfunktion $r(t) = e^{t/10} - 1$ die Differenz der Resultate der Aufgaben (b) und (d) über den Quadraturfehler der Simpsonregel ab.

Punkte: 10

Aufgabe 3: [Amerikanische Optionen]

Seien $V_{Call}(S, t)$ und $V_{Put}(S, t)$ die Werte einer amerikanischen Call- und Putoption zum Zeitpunkt t auf eine Aktie, die keine Dividende zahlt. Zeigen sie, dass die folgende Put-Call Ungleichung gilt:

$$Ke^{-r(T-t)} \leq S(t) + V_{Put}(S, t) - V_{Call}(S, t) \leq K.$$

Punkte: 6

Aufgabe 4: [Exotische Optionen]

(a) Zeigen sie, dass der Preis für einen Fixed Lookback-Call mit Auszahlung $(\max_{0 \leq t \leq T} S(t) - K)^+$ größer ist, als der Preis einer Shout-Option mit Auszahlung $\max \{(S(\bar{t}) - K)^+, (S(T) - K)^+\}$, wobei $\bar{t} < T$ ein vom Halter der Option gewählter Zeitpunkt ist, den er im selbigen Zeitpunkt bestimmt.

(b) Zeigen sie, dass gilt

$$V_{Up-In}(S, t) + V_{Up-Out}(S, t) = V_{Eur}(S, t),$$

wobei $V_{Up-In}(S, t)$ eine Barrier Option ist mit Auszahlungsfunktion

$$V(S, T) = \begin{cases} (S(T) - K)^+ & \text{falls } S(t) > H \text{ für ein beliebiges } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$V_{Up-Out}(S, t)$ eine Barrier Option ist mit Auszahlungsfunktion

$$V(S, T) = \begin{cases} (S(T) - K)^+ & \text{falls } S(t) < H \text{ für alle } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $V_{Eur}(S, t)$ eine europäische Call-Option ist mit Auszahlungsfunktion $(S(T) - K)^+$.

Punkte: 9