Prof. Dr. Thomas Gerstner
Sebastian Becker
Fachbereich Mathematik
Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Sommersemester 2015

Differentialgleichungen

Übungsblatt 10

Abgabe 30.06.2015

Aufgabe 1.
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, eine quadratische Matrix. Bestimmen Sie e^A für folgende Fälle:

a) $A^2 = \alpha \cdot A$ *für* $\alpha \in \mathbb{R}$

b) A *ist Diagonalmatrix oder allgemeiner eine Blockmatrix, d.h.*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_l \end{pmatrix}$$

wobei A_i, $i \in \{1,\dots,l\}$, $l \le n$, *quadratische Matrizen sind.*

c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.

a) *Es seien $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Geben Sie die Lösung von*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & c(t) \end{pmatrix} x$$

zum Anfangswert $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$ an.

b) *Vergleichen Sie die Fundamentalmatrix von $\dot{x} = A(t)x$ für*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $\exp(\int_0^t A(s)\, ds)$.

Aufgabe 3.
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} x, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie das Langzeitverhalten der Differentialgleichung für $t \to \infty$ in Abhängigkeit von α.

Aufgabe 4. *Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen, die den angegebenen Anfangsbedingungen genügen.*

a)
$$y'' = \frac{1 + y'^2}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$$

b)
$$y'' = t\,(y' - 1)\, e^{y'}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $y' = z$.