

Differentialgleichungen

Übungsblatt 9

Abgabe 23.06.2015

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Hinweis: Diagonalisieren Sie die Matrix zuerst!

Aufgabe 2.

Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 8t + 3 \\ -16t - 6 \end{pmatrix}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^2.$$

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Systems.
- Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems mittels Variation der Konstanten.

Aufgabe 3. Sei $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig und periodisch, es gibt also ein $p \in \mathbb{R}$, so dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $A(t+p) = A(t)$ gilt. Weiter sei Y eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung

$$y(t) = A(t)y(t).$$

Zeigen Sie:

- Für jedes ganzzahlige k ist die Abbildung

$$Y_k : t \rightarrow Y(t + kp)$$

ebenfalls eine Fundamentalmatrix.

- Ist $Y(0) = I$ dann gilt $Y(t+p) = Y(t)Y(p)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.