Prof. Dr. Thomas Gerstner
Sebastian Becker
Fachbereich Mathematik
Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Sommersemester 2015

Differentialgleichungen

Übungsblatt 7

Abgabe 09.06.2015

Aufgabe 1.
Betrachten Sie die skalaren Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0$$

mit $(t_0, x_0) \in (\gamma, \delta) \times (\alpha, \beta)$ *und* $-\infty \leq \gamma < \delta \leq \infty$, $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$. *Untersuchen Sie Existenz und Eindeutigkeit der DGL für folgende Vektorfeldfunktionen.*

a) $f(t,x) = \frac{x}{t}$, $\gamma = 1$, $\delta = \infty$, $\alpha = 0$, $\beta = \infty$,

b) $f(t,x) = |x|$, $\gamma = -\infty$, $\delta = \infty$, $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$,

c) $f(t,x) = cx^2 - dx$, $\gamma = -\infty$, $\delta = \infty$, $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$, $c, d \in \mathbb{R}$,

d) $f(t,x) = \frac{1-x}{1+x^2}$, $\gamma = -\infty$, $\delta = \infty$, $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$.

Aufgabe 2.
Gegeben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung folgender Anfangswertaufgabe an, beschreiben Sie das Verhalten am Rand dieses Intervalls und begründen Sie, warum es nicht möglich ist die Lösungen auf ein größeres Intervall fortzusetzen.

$$\frac{dx}{dt} = x^3, \qquad x(0) = 1$$

Aufgabe 3.
Gegeben seien stetige Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und seien* $x_1 < x_2$ *die beiden einzigen Nullstellen von* h. *Zusätzlich sei* λ *eine maximale Lösung eines Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = g(t)h(x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

Zeigen Sie das λ *auf ganz* $\mathbb{R}$ *existiert falls* h *Lipschitz-stetig ist und* $x_1 \leq x_0 \leq x_2$ *gilt.*

Aufgabe 4.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = x^{\frac{2}{3}}$$

a) Finden Sie zwei verschiedene Lösungen zum Anfangswert $x(0) = 0$.

b) Ist die Lösung zum Anfangswert $x(0) = 1$ *für alle* $t \geq 0$ *eindeutig. Lässt sich die Lösung auf ganz* $\mathbb{R}$ *fortsetzen?*