Prof. Dr. Thomas Gerstner
Sebastian Becker
Fachbereich Mathematik
Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Sommersemester 2015

# Differentialgleichungen

## Übungsblatt 8

**Abgabe 16.06.2015**

**Aufgabe 1.**
*Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem* $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ *von Lösungen des Differentialgleichungs-Systems*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} x, \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

*mit der Anfangsbedingung* $\varphi_k(0) = e_k$*, wobei* $e_k$*,* $k = 1, 2, 3$*, die kanonische Basis des* $\mathbb{C}^3$ *bezeichnet.*

**Aufgabe 2.**

a) *Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) *Geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGL an:*

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^t$$

**Aufgabe 3.**
*Gegeben Sei ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine stetige Abbildung*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : I \to M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

*Die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ besitze die spezielle Lösung $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^2$ und im Teilintervall $J \subset I$ gelte $\varphi_1(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Zeigen Sie das man mit Hilfe des Ansatzes*

$$\psi(t) = u(t) \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

*eine zweite Lösung $\psi : J \to \mathbb{R}^2$ erhält, die von $\varphi$ linear unabhängig ist. Hierbei sind $u, g : J \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen die den Differentialgleichungen*

$$\dot{g} = \left( a_{22} - a_{12} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right) g, \qquad \dot{u} = \frac{a_{12}}{\varphi_1} g$$

*genügen.*