

## Übung 3

Abgabe bis Mittwoch, 3.6.2015

### Aufgabe 1:

Transformieren Sie die Ito SDE

$$dX_t = e^{-X_t} dt + X_t dW_t$$

in eine Stratonovich SDE, sowie die Stratonovich SDE

$$dX_t = \cos(X_t) dt + (\sin(X_t) + t^2) \circ dW_t$$

in eine Ito SDE.

### Aufgabe 2:

Sei  $T > 0$  und sei  $\{W_t, t \geq 0\}$  ein Wiener Prozess. Zeigen Sie

$$\int_0^T t dW_t = T W_T - \int_0^T W_t dt$$

mit Hilfe der Definition des Ito-Integrals.

### Aufgabe 3:

Sei  $f : [t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar mit  $\sup_{t \in [0, T], x \in \mathbb{R}} \left| \left( \frac{\partial}{\partial x} f \right) (t, x) \right| < \infty$ . Zeigen Sie, dass  $f$  global Lipschitz-stetig in  $x$  ist und zeigen Sie, dass aus der Lipschitz-Stetigkeit eine lineare Wachstumsbeschränkung für  $f$  in  $x$  folgt.

### Aufgabe 4:

Das stochastische Euler-Verfahren ist gegeben durch

$$X_{n+1} = X_n + f(t_n, X_n) \Delta + g(t_n, X_n) \Delta W_n$$

für  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Implementieren Sie dieses Verfahren und berechnen Sie jeweils einen Pfad der Lösung der SDE

$$dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dW_t$$

für  $t \in [0, 1]$ ,  $X_0 = 1$  und Schrittweite  $\Delta = 10^{-3}$  für die Parameter

- $\alpha = 1, \beta = 0.1$ ,
- $\alpha = 1, \beta = 1$ ,
- $\alpha = 1, \beta = 10$ .

Stellen Sie diesen Pfad jeweils graphisch dar.