GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Stochastische Numerik
SS 2015
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 2

Abgabe bis Mittwoch, 20.5.2015

Aufgabe 1:
Für einen stochastischen Prozess $X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ wird durch die gemäß

$$K(s,t) = Cov(X_s, X_t) = \mathbb{E}\left[(X_s - \mathbb{E}[X_s])(X_t - \mathbb{E}[X_t])\right]$$

definierte Kovarianzfunktion $K : [0,T] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ die gegenseitige Abhängigkeit der beteiligten Zufallsvariablen charakterisiert. Bestimmen Sie die Kovarianzfunktion des Wiener Prozesses.

Punkte: $\boxed{10}$

Aufgabe 2: [Random walk]
Ein Wiener-Prozess kann in Verteilung auf einem endlichen Zeitintervall durch einen Random Walk approximiert werden. Dazu wird das Intervall $[0,1]$ gemäß

$$0 = t_0^N < t_1^N < \ldots < t_N^N = 1$$

in N Teilintervalle der Länge $\Delta t = \frac{1}{N}$ zerlegt mit $N \in \mathbb{N}$. Definiere nun

$$S_N(t_n^N) = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\sqrt{\Delta t} \quad \text{mit} \quad S_N(t) = S_N(t_n^N)$$

für $t_n^N \leq t < t_{n+1}^N$ und $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, wobei $S_N(0) = 0$ und die X_n unabhängige Zufallsvariablen sind, welche die Werte ± 1 mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[S_N(t)]$ und zeigen Sie, dass $\text{Var}[S_N(t) - S_N(s)] \to t - s$ für $N \to \infty$ wobei $0 < t_j^N \leq s \leq t_{j+1}^N < \cdots < t_k^N \leq t < t_{k+1}^N \leq 1$. Was passiert mit $S_N(t)$ wenn $N \to \infty$ geht?

Punkte: $\boxed{10}$

Aufgabe 3: [Box-Muller Methode]
Schreiben Sie ein Programm, das mit Hilfe der Box-Muller Methode vom letzten Übungsblatt, einen Vektor mit 10^6 standard normalverteilten Zufallsvariablen erzeugt. Berechnen Sie numerisch den Erwartungswert und die Varianz dieser Zufallsvariablen. Verwenden Sie diese Zufallsvariablen zusätzlich um einen Pfad eines Wiener-Prozesses $W = \{W_t, t \in [0,1]\}$ zu simulieren und stellen Sie diesen graphisch dar.

Punkte: $\boxed{10}$

Aufgabe 4:
Sei $W = \{W_t, t \geq 0\}$ ein Wiener-Prozess. Zeigen Sie, dass dann sowohl $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot W_{\alpha \cdot t}$ für festes $\alpha > 0$ als auch $W_{t+s} - W_s$, für festes $s \geq 0$, Wiener-Prozesse sind.

Punkte: $\boxed{10}$