Skript zur Vorlesung: „Differentialgleichungen“

Prof. Dr. P.E. Kloeden
Institut für Mathematik

Johann Wolfgang Goethe Universität
Zimmer 101, Robert-Mayer-Straße 10

Telefon: (069) 798 28622 — Sekretariat (069) 798 22422

email: kloeden@math.uni-frankfurt.de

23. Juni 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung (DGL) ist eine Gleichung, die mindestens eine Ableitung einer unbekannten Funktion enthält.

Beispiel 1

$$\frac{dx}{dt} = 2tx$$

mit $x = x(t)$, wobei t die unabhängige Variable und x die abhängige Variable ist.

Beispiel 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{(Wärmegleichung)}$$

mit $u = u(t, x)$, wobei t und x die unabhängigen Variablen sind und u die abhängige Variable ist.

Eine DGL, die nur gewöhnliche Ableitungen enthält (d.h. mit nur einer unabhängigen Variablen), heißt gewöhnliche Differentialgleichung (gDGL), siehe Beispiel 1.

Sonst ist die DGL eine partielle Differentialgleichung (pDGL), siehe Beispiel 2.

In dieser Vorlesung werden wir nur gewöhnliche Differentialgleichungen betrachten.

1.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Die allgemeine Form einer d-dimensionalen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung lautet:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.1}$$

wobei

$$f : (\gamma, \delta) \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

eine gegebene Abbildung ist.

Der Grad der höchsten Ableitung bestimmt die Ordnung der gDG. Wir können immer gDGen höherer Ordnung in die Form (1.1) umschreiben.

Beispiel: gDGLen zweiter Ordnung sind üblich in der Mechanik wegen der Newtonschen Gesetze

$$x = \text{Abstand}, \qquad \frac{dx}{dt} = \text{Geschwindigkeit}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \text{Beschleunigung}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + \beta x = 0}$$

Hier ist der $\alpha\frac{dx}{dt}$ Term die Reibungskraft und der βx Term die Rückzugkraft des Hookeschen Gesetzes.

Mit den neuen Zustandsvariablen

$$x_1 = x, \;\; x_2 = \frac{dx}{dt}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \quad &= \quad x_2 \\ \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx_2}{dt} \quad &= \quad -\beta x - \alpha\frac{dx}{dt} = -\beta x_1 - \alpha x_2 \end{aligned}$$

d.h. die 2-dimensionale gDGL erster Ordnung

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1.2 Lösungen

Eine Lösung der gDGL erster Ordnung (1.1)

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

mit $t \in (\gamma,\delta) \subset \mathbb{R}^1$ und $x \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ ist eine stetig differenzierbare Funktion

$$x : (\alpha,\beta) \subset (\gamma,\delta) \longrightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d,$$

die der Gleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t,x(t))$$

für jedes $t \in (\alpha,\beta)$ genügt.

Beispiel: Gegeben sei die gDGL

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = 2x},$$

also $f(t,x) = 2x$ mit $(\gamma,\delta) \equiv \mathbb{R}^1$, daher mit $\mathcal{U} \equiv \mathbb{R}^1$.

Dann ist $x(t) = e^{2t}$ eine Lösung für alle $t \in (-\infty,\infty) \equiv \mathbb{R}^1$. Hier ist $x(t)$

- offensichtlich stetig differenzierbar

- und erfüllt der gDGL
$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}e^{2t} = 2e^{2t} = 2x \qquad \forall t \in \mathbb{R}^1$$

Es gibt auch andere Lösungen:

$$x(t) = Ae^{2t} \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

für jede Konstante $A \in \mathbb{R}^1$.

Anfangswertaufgabe

Oft wollen wir eine bestimmte Lösung, die einen gegebenen Anfangswert

$$x(t_0) = x_0 \quad (t_0, x_0 \quad \text{gegeben})$$

genügt.z.B.:
$$x(t) = Ae^{2t} \Leftrightarrow x(t_0) = Ae^{2t_0} = x_0 \Leftrightarrow A = x_0 e^{-2t_0}$$

Dann sagen wir:
$$x(t) = x_0 e^{2(t-t_0)}$$

ist eine Lösung der Anfangswertaufgabe (AWA)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = f(t,x) \qquad \underline{\text{gDGL}} \\ x(t_0) & = x_0 \qquad \underline{\text{AW}} \end{cases}$$

Fragen

1) Besitzt jede AWA

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = f(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

eine Lösung ? (Existenz)

2) Besitzt eine AWA nur eine Lösung? (Eindeutigkeit)

3) Wie können wir Lösungen explizit finden? Sonst?

1.3 Überblick der Vorlesung

Wir werden die obigen und anderen Fragen in der Vorlesung betrachten.

1.3.1 Teil 1: Lösungsmethoden

Wir können verschiedene skalare ($d = 1$) gDGLen mit einer Sonderstruktur explizit lösen. z.B.:

1) gDGLen mit getrennten Variablen

$$\frac{dx}{dt} = \underbrace{g(t) \cdot h(x)}_{\text{Produkt}}$$

2) lineare gDGLen

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t)$$

Aber im Allgemeinen gibt es keine expliziten Lösungen.

Was ist zu tun ?

Numerik oder einer Untersuchung qualitativer Eigenschaften

Teil 2: Existenz- und Eindeutigkeitsssätze

dh. für AWAen sowie Untersuchen der Eigenschaften der Lösungen

zB. stetige Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern: $(t, t_0, x_0) \to x(t; t_0, x_0)$.

Teil 3: Lineare vektorwertige gDGen

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad \text{wobei} \quad A \text{ eine } d \times d - \text{Matrix ist}$$

$\Longrightarrow$ Lösung $x(t) = e^{At}c$, wobei e^{At} eine $d \times d$ Matrix ist und $c \in \mathbb{R}^d$.

Teil 4 : Dynamik ($t \equiv$ Zeit)

- Ruhelage $\equiv$ konstante Lösung

$$x(t) \equiv \overline{x} \Leftrightarrow f(t, \overline{x}) \equiv 0 \;\; \forall t$$

- periodische Lösung (Zyklus) : $x(t+T) \equiv x(t) \;\; \forall t$

$\Longrightarrow$ dynamisches Verhalten insbesondere langfristiges Verhalten für $t \mapsto \infty$.
zB Stabiltität, Instabilität, Grenzzyklen, Attraktoren.

1.4 Literatur

Lehrbücher

1) B. Aulbach, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum

2) W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer (1.-6. Auflage !)

Skripten

1) Prof. Dr. J. Baumeister, *Vorlesung über gDGen SS 99* (Bibliothek/www)

2) Prof. Dr. P. Kloeden, *Vorlesung über gDG SS 00* , Bibliothek und Sekretariat (Zimmer 102)

Kapitel 2

Explizit lösbare gewöhnliche Differentialgleichungen

Es gibt Lösungsrezepte und -methoden für verschiedene Klassen skalarer gewöhnliche Differentialgleichungen mit einer Sonderstruktur.

2.1 Gewöhnliche DGLen mit getrennten Variablen

Literatur Baumeister, S. 4-7; Walter, S. 13-15 (6. Auflage); auch Aulbach; S. 147 - 148.

Eine skalare gDGL mit getrennten Variablen hat die Form

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = g(t) \cdot h(x)} \qquad \text{Produkt!}$$

d.h. mit $f(t,x) = g(t) \cdot h(x)$

Leibniz hat das folgende Lösungsrezept erfunden

1) Schreibe die gewöhnliche Differentialgleichung um

$$\underbrace{\frac{1}{h(x)}dx}_{\text{nur } x \text{ an dieser Seite}} \quad = \quad \underbrace{g(t)dt}_{\text{nur } t \text{ an dieser Seite}}$$

2) Integriere die beiden Seiten

$$\underbrace{\int^x \frac{1}{h(x)}dx}_{\text{Funktion von } x} \quad = \quad \underbrace{\int^t g(t)dt}_{\text{Funktion von } t}$$

d.h. eine Gleichung für die Lösung in impliziter Form.

3) versuche die Lösung in expliziter Form $x = x(t)$ zu finden.

Beispiel $\frac{dx}{dt} = 2tx$ — also mit $g(t) = 2t$ und $h(x) = x$

Rezept a la Leibniz

1) Schreibe $\frac{1}{x}dx = 2tdt$

2) Integriere $\int^x \frac{1}{x}dx = \int^t 2tdt$

$\Longrightarrow \quad \ln x + K_1 = t^2 + K_2 \qquad K_1, K_2$ beliebige Integrationskonstanten

$\Longrightarrow \quad \ln x = t^2 + K$

mit $K = K_1 - K_2$ beliebige Konstante

3) $x = e^{t^2+K} = e^{t^2} \cdot e^K = Ae^{t^2} \qquad$ wobei $A = e^K$

$\Longrightarrow$ Lösung $\boxed{x = x(t) = Ae^{t^2}}$ $\quad A$ beliebige Konstante

Wunderbar ! gut genug für Leibniz, Physiker, Ingenieure (und auch uns, wenn wir die Lösung finden wollen!)

aber: mathematisch schlampig! Note 3.0!

Warum?

a) Wir dürfen dx und dt in $\frac{dx}{dt}$ nicht trennen !

b) $\int \frac{1}{x}dx$ ist uneigentlich für $x = 0$!

c) $\ln x$ ist nicht definiert für $x < 0$ (d.h. $A < 0$ oben)

Aber: wir können die Schritte des obigen Rezepts mathematisch rechtfertigen und ein bißchen genauer aufschreiben.

a) Wir benutzen die Kettenregel: Sei $H(x)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{h(x)}$, d.h.

$$\frac{d}{dx}H(x) = \frac{1}{h(x)},$$

und sei $x = x(t)$eine Lösung der Gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = g(t) \cdot h(x),$$

d.h.

$$\frac{d}{dt}x(t) = g(t) \cdot h(x(t)).$$

Die Kettenregel ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(x(t)) &= \frac{d}{dx}H(x)|_{x=x(t)} \cdot \frac{d}{dt}x(t) \\ &= \frac{1}{h(x(t))} \cdot \frac{d}{dt}x(t) \\ &= \frac{1}{h(x(t))} \cdot h(x(t))g(t) \\ &= g(t)\end{aligned}$$

Integriere die beiden Seiten von t_0 bis t (bzg. s)

$$\begin{aligned}\int_{t^0}^{t} g(s)ds &= \int_{t^0}^{t} \frac{d}{ds}H(x(s)) \cdot ds \\ &= H(x(t)) - H(x(t_0)) \\ &= \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{1}{h(x)}dx\end{aligned}$$

Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung!

Die Funktion $x \mapsto \dfrac{1}{h(x)}$ muss <u>stetig</u> sein, d.h. $h(x) = 0$ streng verboten !

b) Das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{h(x)}dx$$

ist <u>uneigentlich</u>, falls $h(\overline{x}) = 0$ für $\overline{x} \in [x_1, x_2]$

<u>Aber</u>

(i)

$$h(\overline{x}) = 0 \iff x(t) = \overline{x}$$

ist eine Lösung der Gewöhnlichen Differentialgleichung (Ruhelage!)

$$0 \equiv \frac{d}{dt}\overline{x} = g(t)h(\overline{x}) \equiv 0!$$

(ii) Wegen des Existenz-Eindeutigkeitssatzes (später) dürfen zwei Lösungen der Gewöhnlichen Differentialgleichung <u>sich nie überschneiden.</u>

$\Longrightarrow$ nur <u>eine</u> der folgenden Möglichkeiten kann passieren:

$$x(t) \equiv \overline{x} \quad \underline{\text{oder}} \quad x(t) < \overline{x} \quad \underline{\text{oder}} \quad x(t) > \overline{x}$$

für alle t.

$\Longrightarrow$ entweder ist die Lösung eine Ruhelage oder bleibt sie immer in einem Gebiet, wo das obige Integral eigentlich ist !

(iii) Die geeignete Stammfunktion für $\frac{1}{x}$, falls $x < 0$, ist $\ln|x|$.

sehr mühsam !

Beispiel

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = ax(1-x)}$$

Verhulst-Gleichung (Bevölkerungsdynamik) also $g(t) \equiv a, h(x) = x(1-x)$.

1) Ruhelagen $\quad 0 = h(\overline{x}) = \overline{x}(1-\overline{x}) \quad \Longrightarrow \quad \overline{x} = 0$ oder $\overline{x} = 1$

$\Longrightarrow \quad \dfrac{x(t)}{1-x(t)}$ ist immer > 1 oder immer < 0 oder immer zwischen 0 und 1, falls $x(t) \neq 0$ oder 1.

2) Leibniz verbessert Sei $x \neq 0$ oder 1. Integriere die unbestimmten Integrale

$$\begin{aligned} \int^t a\,dt &= \int^t \frac{1}{x(1-x)} \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int^x \frac{1}{x(1-x)} dx \\ &= \int^x \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right] dx \qquad \text{Bruchzerlegung} \end{aligned}$$

d.h.

$$at + K_1 = \ln|x| - \ln|1-x| + K_2$$

wobei K_1, K_2 beliebige Konstanten sind;

$$\Longrightarrow \quad \ln\left|\frac{x}{1-x}\right| = at + K$$

mit $K = K_1 - K_2$ beliebig, d.h.

$$\left|\frac{x(t)}{1-x(t)}\right| = e^{at+k} = e^{at} \cdot e^K.$$

Definiere $A = e^K \cdot \operatorname{sgn}(\frac{x(t)}{1-x(t)})$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{x(t)}{1-x(t)} = Ae^{at}}$$

$$\Longrightarrow \qquad x(t) = Ae^{at}(1-x(t)) \Longrightarrow \qquad x(t) \cdot \{1 + Ae^{at}\} = Ae^{at}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Lösung} \quad x(t) = \frac{Ae^{at}}{1 + Ae^{at}}$$

<u>Anfangsbedingungen</u>

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{mit} \quad x_0 \neq 0, 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 = \frac{Ae^{at_0}}{1 + Ae^{at_0}}$$

$$\text{Löse für} \quad A \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{x_0 e^{-at_o}}{1 - x_0}$$

Deshalb lautet die Lösung der AWA

$$x(t) = \frac{\dfrac{x_0 e^{-at_0}}{1 - x_0} \cdot e^{at}}{1 + \dfrac{x_0 e^{-at_0}}{1 - x_0} \cdot e^{at}} = \frac{x_0 e^{a(t-t_0)}}{(1 - x_0) + x_0 e^{a(t-t_0)}}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{x(t) = \frac{x_0 e^{a(t-t_0)}}{1 + x_0\{e^{a(t-t_0)} - 1\}}} \qquad x_0 \neq 0, 1$$

<u>Bemerkung</u>: Von dieser Formel erhalten wir

$$x_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(t) \equiv 0 \quad \text{and} \quad x_0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x(t) \equiv 1$$

d.h. die Lösungsformel ergibt auch die Ruhelagen in diesem Fall, obwohl die Lösungsmethode dann nicht gültig ist.

<u>Pass auf:</u> geht nicht immer für jede gDGL — es ist besser die Ruhelagen <u>direkt</u> zu finden.

Kapitel 3

Andere explizit lösbare gewöhnliche DGLen

3.1 Gewöhnliche DGLen mit getrennten Variablen nach einer Substitution

Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = F(at + bx + c)} \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ (Konstanten!)}$$

und die Substitution

$$\boxed{y = at + bx + c}$$

d.h. $\quad y(t) = at + bx(t) + c$ ist Lösung der gDGL

$$\Longrightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = a + b\frac{dx}{dt} = a + bF(\underbrace{at + bx + c}_{=y})$$

dh $\quad \boxed{\frac{dy}{dt} = a + bF(y)}$ eine gDGL mit getrennten Variablen

Beispiel $\quad \boxed{\frac{dx}{dt} = t + x}$ Summe statt Produkt ! (dh: keine getrennten Variablen für t und x)

Substituiere: $y = t + x \qquad \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dx}{dt} = 1 + (t + x) = 1 + y$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = 1 + y}$$

Dann erhalten wir die neue gDGL mit getrennte Variablen !

Diese hat die Ruhelage : $\overline{y} = -1$

Mit dem Lösungsrezept von Leibniz erhalten wir für $y \neq -1$

$$\frac{1}{1+y}dy = 1 \cdot dt$$

Integrieren ergibt $\ln|1+y| = t + K$, wobei K beliebige Integrationskonstante ist.

$$\Longrightarrow \quad |1+y(t)| = e^{t+K} = e^K \cdot e^t \quad \Longrightarrow \quad 1+y(t) = Ae^t$$

wobei $A = e^K \cdot \operatorname{sgn}(1+y)$

Aber $y(t) = t + x(t) \quad \Longrightarrow \quad 1 + t + x(t) = Ae^t$

$$\underline{\text{Lösung}} \quad \boxed{x(t) = Ae^t - t - 1}$$

3.2 Homogene gewöhnliche Differentialgleichungen

Homogene gewöhnliche Differentialgleichungen sind von der Form

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{g(t,x)}{h(t,x)}}$$

wobei g, h homogene Funktionen mit gleichem Grad p sind.

Eine Funktion $g = g(t,x)$ heißt homogen mit Grad p, falls

$$g(\lambda t, \lambda x) \equiv \lambda^p g(t,x)$$

für alle t, x und λ (vielleicht $\lambda \neq 0$)

Mit $\lambda = \frac{1}{t}$ erhalten wir

$$g\left(1, \frac{x}{t}\right) \equiv t^{-p} \cdot g(t,x) \quad \Longrightarrow \quad g(t,x) \equiv t^p \cdot g\left(1, \frac{x}{t}\right)$$

Dann lautet die gDGL

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g(t,x)}{h(t,x)} = \frac{t^p \cdot g\left(1, \frac{x}{t}\right)}{t^p \cdot h\left(1, \frac{x}{t}\right)} = \frac{dx}{dt} = \frac{g(1, \frac{x}{t})}{h\left(1, \frac{x}{t}\right)}$$

Substituiere $\boxed{y = \frac{x}{t}}$, d.h.

$$y(t) = \frac{x(t)}{t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{g(1,y)}{h(1,y)}$$

Aber

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\{t \cdot y\} = 1 \cdot y + t\frac{dy}{dt} \Longrightarrow y + t\frac{dy}{dt} = \frac{g(1,y)}{h(1,y)}$$

.

Durch Umstellen erhalten wir die neue gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen t und y.

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = t^{-1}\left[\frac{g(1,y)}{h(1,y)} - y\right]}$$

Beispiel $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x+t}{t}}$

Hier haben wir $g(t,x) = t + x$ und $h(t) = t$

Betrachten wir die Homogenität von g und h.

$$\begin{cases} g(\lambda t, \lambda x) & = (\lambda x) + (\lambda x) = \lambda(t+x) = \lambda g(t,x) \\ h(\lambda t, \lambda x) & = (\lambda t) = \lambda \cdot t = \lambda h(t,x) \end{cases}$$

d.h. g, h sind homogen mit Grad $p = 1$. Nun können wir die Reduktion ausführen

$$\Longrightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{x+t}{t} = \frac{t \cdot \left[\frac{x}{t} + 1\right]}{t} = \frac{x}{t} + 1$$

und substituieren $y = \dfrac{x}{t}$ (oder $x = t \cdot y$) und erhalten

$$\Longrightarrow \qquad y + 1 = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\{ty\} = 1 \cdot y + t \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = t^{-1}\{y + 1 - y\} = t^{-1}$$

d.h. eine gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen t, y (ohne y – trivialer Fall!)

Durch Integration erhalten wir $\quad y(t) = \ln|t| + K \quad$ für $t \neq 0$, wobei K eine beliebige Konstante ist.

Aber $x(t) = t \cdot y(t) \quad \Longrightarrow \quad$ Lösung $\boxed{x(t) = t\ln|t| + Kt}$ für $t < 0$ oder für $t > 0$.

3.3 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine skalare gDGL erster Ordnung

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

heisst linear, falls die Funktion

$$x \longmapsto f(t,x) \qquad (t \text{ fest})$$

linear in x ist.

Die Standardform einer linearen skalaren gDGL erster Ordnung lautet

$$\boxed{\frac{dx}{dt} + p(t) \cdot x = q(t)}$$

d.h. mit $f(t,x) = -p(t)x + q(t)$

Beispiel $\boxed{2\frac{dx}{dt} = 4x + e^{2t}}$ ist linear mit Standardform

$$\frac{dx}{dt} - 2x = \frac{1}{2}e^{2t}$$

d.h. mit $p(t) \equiv -2$ und $q(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$

Bemerkung Die Koeffizientenfunktionen $t \to p(t)$ und $t \to q(t)$ dürfen nichtlinear (bzg. t) sein.

Voraussetzungen Die Koeffizientenfunktion $t \to p(t)$, $t \to q(t)$ sind stetig (vielleicht unter einer Beschränkung: $t \in (\gamma, \delta)$).

Definiere $\boxed{\mu(t) = e^{\int^t p(s)ds}}$ $\mu = \mu(t)$ heißt integrierender Faktor

(ein unbestimmtes Integral reicht hier – aber einfacher mit Integrationskonstante = 0).

Warum? Wir können die gDGL in eine integrierbare Form mit der Hilfe von μ umschreiben.

Kettenregel $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mu(t) &= \frac{d}{dt}e^{\int^t p(s)ds} \\
&= \left.\frac{d}{du}e^u\right|_{u=\int^t p(s)ds} \cdot \frac{d}{dt}\left(\int^t p(s)ds\right) \\
&= e^{\int^t p(s)ds} \cdot \frac{d}{dt}\left(\int^t p(s)ds\right) \\
&= \mu(t) \cdot \frac{d}{dt}\left(\int^t p(s)ds\right)
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von p ergibt der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung dann

$$\frac{d}{dt}\int^t p(s)ds = p(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\mu(t) = \mu(t) \cdot p(t)}$$

Multipliziere die beiden Seiten der gewöhnlichen Differentialgleichung mit $\mu(t)$:

$$\begin{aligned}
\mu(t)q(t) &= \mu(t)\frac{d}{dt}x(t) + \underbrace{\mu(t)p(t)}\,x(t) \\
&= \mu(t)\frac{d}{dt}x(t) + x(t)\frac{d}{dt}\mu(t) \\
&= \frac{d}{dt}\{\mu(t)x(t)\}
\end{aligned}$$

Produktregel!

Durch Integration erhalten wir $\mu(t) \cdot x(t) = \int^t \mu(t)q(t)dt + K$, wobei K eine beliebige Integrationskonstante ist.

$$\boxed{x(t) = \frac{\int^t \mu(t)q(t)dt + K}{\mu(t)}}$$

Beispiel $\boxed{\frac{dx}{dt} - 2x = \frac{1}{2}e^{2t}}$ Standardform !

$$p(t) \equiv -2,\ q(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$$

Integrierender Faktor

$$\mu(t) = e^{\int^t p(s)ds} = e^{\int^t -2ds} = e^{-2t}$$

mit

$$\frac{d}{dt}\mu(t) = \frac{d}{dt}e^{-2t} = -2e^{-2t} = -2\mu(t))$$

Zur Veranschauung multipliziere die gDGL mit $\mu(t) = e^{-2t}$

$$\begin{aligned} \underbrace{e^{-2t}}_{\mu(t)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}e^{2t}}_{q(t)} &= e^{-2t}\frac{dx}{dt} - 2e^{-2t} \cdot x \\ &= e^{-2t}\frac{dx}{dt} + x \cdot \frac{d}{dt}e^{-2t} = \frac{d}{dt}\{e^{-2t} \cdot x\} \end{aligned}$$

Integration nach t liefert dann die Lösung der ursprünglichen gDGL

$$\boxed{x(t) = \left(\tfrac{1}{2}t + K\right)e^{2t}}$$

Anfangswert $x(0) = 1 \quad \Longrightarrow\ 1 = \left(\tfrac{1}{2} \cdot 0 + K\right) \cdot e^0 \quad \Longrightarrow\ K = 1$

$\Longrightarrow$ AWA-Lösung $\boxed{x(t) = \left(\tfrac{1}{2}t + 1\right)e^{2t}}$

Kapitel 4

Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen (nochmal)

Oft können wir eine nichtlineare gDGL in eine lineare gDGL umschreiben oder transformieren.

4.1 Rollentausch der Variablen

Eine gDGL

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x),$$

die nichtlinear bzg. x ist, ist manchmal linear bzg. t, wenn wir t als die abhängige Variable und x als die unabhängige Variable betrachten.

Beispiel $\boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{xe^x}{x+te^x}}$

Diese gDGL ist offensichtlich nichtlinear bzg. x.

Aber wenn wir alles umkehren, dann erhalten wir

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{x+te^x}{xe^x} = +e^{-x} - \frac{1}{x}t$$

d.h. $\boxed{\frac{dt}{dx} + \frac{1}{x} \cdot t = -e^{-x}}$ linear bzg. t

Standardform $\Longrightarrow$ $p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = -e^{-x}$

Bemerkung

Die Koeffizientenfunktion $x \Longrightarrow \mu(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig genau dann, wenn $x \neq 0$.

Im Fall $x = 0$ beobachten wir, dass $x(t) \equiv 0$ eine Lösung der ursprünglichen gDGL ist.

Der integrierbare Faktor für $x \neq 0$ lautet hier

$$\mu(x) = e \int^x p(x)dx = e \int^x \frac{1}{x}dx = e^{\ln x} = x$$

Dann gilt

$$-x \cdot e^{-x} = x\frac{dt}{dx} + x \cdot \frac{1}{x}t = x\frac{dt}{dx} + t = \frac{d}{dx}\{x \cdot t\}$$

Integriere:

$$\begin{aligned} x \cdot t(x) &= -\int^x xe^{-x}dx + K \\ &= (x+1) \cdot e^{-x} + K \\ \Longrightarrow t(x) &= \frac{x+1}{x} \cdot e^{-x} + \frac{K}{x} \end{aligned}$$

Besser, weil wir $x = x(t)$ wollen, die implizite Form, wobei K eine beliebige Konstante ist.

$$\boxed{tx - (x+1)e^{-x} = K.}$$

mit $\boxed{x(t) \equiv 0}$ als eine besondere Lösung.

4.2 Bernoullische Differentialgleichungen

Die Standardform einer Bernoullischen gDGL lautet

$$\boxed{\frac{dx}{dt} + a(t)x + b(t)x^p = 0}$$

wobei $a, b : (\gamma, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind und $p \in \mathbb{R}$.

Sonderfälle

1) $p = 0 \Longrightarrow \dfrac{dx}{dt} + a(t)x + b(t) = 0 \qquad (x^0 \equiv 1)$

   d.h. linear mit Standardform $\quad \dfrac{dx}{dt} + a(t)x = -b(t)$

2) $p = 1 \Longrightarrow \dfrac{dx}{dt} + a(t)x + b(t)x = 0$

   d.h. linear mit Standardform $\quad \dfrac{dx}{dt} + \{a(t) + b(t)\} \cdot x = 0$

3) $b(t) \equiv 0 \Longrightarrow \dfrac{dx}{dt} + a(t)x = 0$ d.h.linear

4) $a(t) \equiv 0 \Longrightarrow \dfrac{dx}{dt} + b(t)x^p = 0 \Longrightarrow \dfrac{dx}{dt} = -b(t)x^p$ getrennte Variablen

5) $a(t) \equiv Kb(t)$ mit Konstante $K \implies \dfrac{dx}{dt} = -b(t) \cdot (Kx + x^p)$ getrennte Variablen

In dem allgemeinen Fall ($p \neq 0, 1$ hier)

- multipliziere die Bernoullische gDGL mit x^p

$$\implies x^{-p} \cdot \frac{dx}{dt} + a(t) \cdot x^{1-p} + b(t) = 0 \qquad (x \neq 0)$$

- substituiere $\boxed{y = x^{1-p}}$

$$\implies \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} x^{1-p} = (1-p) x^{-p} \frac{dx}{dt}$$

Einsetzen in die Ausgangs gDGL ergibt $\dfrac{1}{1-p} \dfrac{dy}{dt} + a(t)y + b(t) = 0$ eine lineare gDGL mit Standardform

$$\frac{dy}{dt} + (1-p)a(t) \cdot y = -(1-p) \cdot b(t)$$

$$\implies p(t) = (1-p)a(t),\ q(t) = -(1-p) \cdot b(t)$$

Beispiel $\boxed{\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{1}{3} tx + \dfrac{1}{3} tx^4 = 0}$ Also $a(t) = \frac{1}{3}t, \quad b(t) = \frac{1}{3}t, \quad p = 4$

Wir haben die Ruhelage $x(t) \equiv 0$!

Für alle anderen Lösungen gilt $x \neq 0$. Wir benutzen obigen Ansatz und multiplizieren die gDGL mit x^{-4}

$$\implies \qquad x^{-4} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{3} tx^{-3} + \frac{1}{3} t = 0$$

Die Substitution $\boxed{y = x^{-3}}$ ergibt

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} x^{-3} = -3x^{-4} \frac{dx}{dt} \qquad \text{oder} \qquad x^{-4} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{3} \frac{dy}{dt}.$$

Dann erhalten wir die lineare gDGL

$$\frac{1}{3} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{3} ty + \frac{1}{3} t = 0$$

oder in Standardform

$$\frac{dy}{dt} - ty = -t$$

$\Longrightarrow$ integrierender Faktor $\quad \mu(t) = e^{\int^t -tdt} = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\{e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot y\} = e^{-\frac{1}{2}t^2}\frac{dy}{dt} - te^{-\frac{1}{2}t^2}y = -te^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Integriere

$$e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot y = -\int^t te^{-\frac{1}{2}t^2}dt = e^{-\frac{1}{2}t^2} + K$$

wobei K eine beliebige Konstante ist. Die Lösung der linearen DGL lautet dann

$$y(t) = 1 + Ke^{\frac{1}{2}t^2}$$

Durch Rücksubstitution mit $x = y^{-\frac{1}{3}}$ erhalten wir die Lösung der Bernoullische DGL

$$\boxed{x(t) = (1 + Ke^{\frac{1}{2}t^2})^{-\frac{1}{3}}} \qquad \text{oder} \quad x(t) \equiv 0$$

4.3 Riccatische Differentialgleichungen

Die Standardform einer Riccatischen gDGL lautet

$$\boxed{\tfrac{x}{dt} + a(t)x + b(t)x^2 = c(t)}$$

wobei $a, b, c : (\gamma, \delta) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.

Sonderfall (u.a.)

$$c(t) \equiv 0 \Longrightarrow \frac{dx}{dt} + a(t)x + b(t)x^2 = 0 \qquad \text{Bernoullische gDGL mit } p = z.$$

Es gibt kein allgemeines Lösungsrezept für Riccatische gDGLen! Aber:

Satz *Seien $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen der Riccatischen gDGL*

$$\frac{dx}{dt} + a(t)x + b(t)x^2 = c(t)$$

in einem Intervall (γ, δ).

Dann ist $z = x_2 - x_1$ Lösung der Bernoullischen gDGL

$$\frac{dz}{dt} + \{a(t) + 2b(t)x_1(t)\} \cdot z + b(t)z^2 = 0$$

Beweis $\quad z = x_2 - x_1$, wobei

$$\frac{dx_i}{dt} + a(t)x_i + b(t)x_i^2 = c(t), \qquad i = 1, 2$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \frac{dz}{dt} &= \frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \\
&= \left[c(t) - a(t)x_2 - b(t)x_2^2\right] - \left[c(t) - a(t)x_1 - b(t)x_1^2\right] \\
&= -a(t)(x_2 - x_1) - b(t)(x_1^2 - x_1^2) \\
&= -a(t)z - b(t)\cdot(x_2 - x_1)\cdot(x_2 - x_1 + 2x_1) \\
&= -a(t)z - b(t)\cdot z(z + 2x_1).
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \frac{dz}{dt} + \{a(t) + 2b(t)x_1(t)\}z + b(t)z^2 = 0.
$$

Wenn wir eine Lösung $x_1(t)$ irgendwie raten können, dann können wir andere Lösungen

$$x(t) = z(t) + x_1(t)$$

finden, wobei $z(t)$ eine Lösung der obigen (explizit lösbaren!) Bernoullischen gDGL ist!

Lösungsansatz für $x(t)$: *Probiere eine Funktion der selben Form der Koeffizientenfunktionen a, b, c , zB Polynome, trigonometrische Funktionen, usw.*

Beispiel: $\boxed{\dfrac{dx}{dt} + (2 + t - 1)x - x^2 = 1 - t + t^2}$

also $a(t) = 2t - 1$' $b(t) \equiv -1$, $c(t) = 1 - t + t^2 \quad (\forall t)$ d.h. Polynome höchsten Grades = 2..

Weil $x_1(t)^2$ vorkommt, machen wir den Ansatz :

$$x_1(t) = \alpha + \beta t, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1,$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad 1 - t + t^1 &= \beta + (2t - 1)(\alpha + \beta t) - (\alpha + \beta t)^2 \\
&= (\beta - \alpha - \alpha^2)\cdot 1 + (2\alpha - \beta - 2\alpha\beta)t + (2\beta - \beta^2)t^2
\end{aligned}
$$

Vergleich der Koeffizienten ergibt

$$
\begin{aligned}
\beta - \alpha - \alpha^2 &= 1 & \underline{x}^0 \\
2\alpha - \beta - 2\alpha\beta &= -1 & \underline{x}^1 \\
2\beta - \beta^2 &= 1 & \underline{x}^2
\end{aligned}
$$

Eine Lösung (u.a.) lautet $\alpha = 0$, $\beta = 1$

$$\Longrightarrow \boxed{x - 1(t) = t}$$

Sei $x = z + x_1$ eine andere Lösung der Riccatischen gDGL. Von dem obigen Satz genügt z einer Bernoullischen gDGL. Es ist besser, diese Bernoullische gDGL direkt herzuleiten (statt der Formel in dem Satz zu benutzen).

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \\
&= [(1-t+t^2) - (2t-1)x + x^2] - 1 \\
&= (1-t+t^2) - (2t-1)(z+t) + (z+t)^2 - 1 = z + z^2
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Bernoullische gDGL mit $p = 2$ $\qquad \dfrac{dz}{dt} - z - z^2 = 0$

Substitution $y = z^{-1}$ $\Longrightarrow$ $\dfrac{dy}{dt} + y = -1$ mit Lösung $y(t) = Ae^{-t} - 1$ (A beliebige Konstante)

$\Longrightarrow \quad z(t) = \dfrac{1}{y(t)} = \dfrac{1}{Ae^{-1} - 1}$

Daher lautet die Lösung der Riccatischen gDGL

$$x(t) = z(t) + x_1(t) = z(t) + x_1(t) = z(t) + t = \frac{1}{Ae^{-t} - 1} + t$$

$$\text{dh} \qquad \boxed{x(t) = \frac{e^t}{A - e^t} + t}$$

Beachte die Definitionsbereiche

1) $A \leq 0 \Longrightarrow \forall t \in (-\infty, \infty)$

2) $A > 0 \Longrightarrow t \in (-\infty, \ln A)$ oder $t \in (\ln A, \infty)$.

Kapitel 5

Exakte gewöhnliche Differentialgleichungen

Die dahinter liegende Idee ist ganz einfach.

Sei $\psi = \psi(t,x)$ eine stetig differenzierbare Funktion auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$.

Sei $x = x(t)$ auch eine stetig differenzierbare Funktion mit $(t, x(t)) \in D$, die der <u>impliziten</u> Gleichung

$$\boxed{\psi(t, x(t)) \equiv K} \qquad \text{(d.h. eine Konstante)}$$

genügt.

$$\begin{aligned} \underline{\text{Kettenregel}} \quad \Longrightarrow \quad 0 \equiv \frac{d}{dt}K \quad &\equiv \quad \frac{d}{dt}\psi(t, x(t)) \\ &= \quad \frac{\partial\psi}{\partial d}(t, x(t)) + \frac{\partial\psi}{\partial x}(t, x(t)) \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

<u>d.h.</u> $x = x(t)$ ist eine Lösung der gDGL

$$\boxed{M(t,x) + N(t,x)\frac{dx}{dt} = 0},$$

wobei

$$M(t,x) = \frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x), \quad N(t,x) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(t,x)$$

sind.

<u>Umgekehrt</u> Jetzt kommen wir aus der anderen Richtung: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und seien $M, N : D \longrightarrow \mathbb{R}$ gegebene Funktionen. Eine gDGL der Bauart

$$M(t,x) + N(t,x)\frac{dx}{dt} = 0 \qquad (*)$$

heisst <u>exakt</u>, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion

$$\psi =: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

jetzt mit

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x) = M(t,x), \frac{\partial\psi}{\partial x}(t,x) = N(t,x)$$

für $(t,x) \in D$.

Dann sind die hohen Linien der Funktion ψ, d.h.

$$\psi(t,x) \equiv \text{Konstante},$$

die Lösungskurven dieser exakten gDGL.

Aber

1) *wie können wir leicht prüfen (ohne ψ zu finden), ob eine gDGL der obigen Bauart exakt ist ?*

2) *Wenn Ja, wie können wir ψ finden?*

Satz *Sei $D = (a,b,)x(c,d) \subset \mathbb{R}^2$ und seien $M, N : D \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Dann sind äquivalent:*

a) *Es gibt $\psi : D \to \mathbb{R}$ mit stetigen partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} \equiv M, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} \equiv N.$$

b) *es gilt das so genannte Integrabilitätskriterium:*

$$\frac{\partial M}{\partial x} \equiv \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Beweis

a) $\implies b)$ Aus der Analysis wissen wir: $\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial x} \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}$. Also gilt

$$\frac{\partial M}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t} \equiv \frac{\partial N}{\partial t}$$

b) $\implies a)$ sei $(t_0, x_0) \in D$ beliebig und definiere eine „Stammfunktion“ von M, N durch

$$\psi(t,x) = \int_{t_o}^{t} M(s,x_0)ds + \int_{x_0}^{x} N(t_0,y)dy$$

Man rechnet nach:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = M, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = N.$$

<u>Beispiel:</u> $\boxed{(3x+e^t)+(3t+\cos x)\cdot\frac{dx}{dt}=0}$

Hier lauten $M(t,x)=3x+e^t$ und $N(t,x)=3t+\cos x$

$\Longrightarrow$ stetig partiell differenzierbar für alle $(t,x)\in R^2$. mit

$$\frac{\partial M}{\partial x}=3=\frac{\partial N}{\partial t}$$

$\Longrightarrow$ die gDGL ist <u>exakt</u>.

Statt der formel für ψ in dem Beweis zu benutzen:

1) Integriere $\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)=M(t,x)=3x+e^t$ bzg. t mit x fest

$$\psi(t,x)=\int^t(3x+e^t)dt=3xt+e^t+g(x)$$

Integrationskonstante (bzg t) ist eine beliebige Funktion von x !

2) Integriere $\frac{\partial\psi}{\partial x}(t,x)=M(t,x)=3t+\cos x$ bzg. x mit t fest

$$\psi(t,x)=\int^x(3t+\cos x)dx=3tx+\sin x+h(t)$$

Integrationskonstante (bzg. x) ist eine beliebige Funktion von t.

3) Vergleiche die obigen Ausdrücke für ψ.

$$\psi(t,x)=3tx+e^t+g(x)\equiv 3tx+\sin x+h(t)\quad\Longrightarrow\quad g(x)=+\sin x,\quad h(t)=e^t.$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\psi(t,x)=3tx+e^t+\sin x}$ (vielleicht auch plus eine Konstante)

Die Lösungskurven der gDGL sind

$$\psi(t,x)=3tx+e^t+\sin x\equiv\text{Konstante } K$$

<u>z.B.</u> für den Anfangswert $x(0)=\pi$ gilt:

$$K=\psi(0,\pi)=3\cdot 0\cdot\pi+e^0+\sin\pi=1$$

und die gesuchte Lösungskurve lautet

$$3tx+e^t+\sin x\equiv 1$$

<u>d.h.</u> eine Lösung der Anfangswertaufgaben in impliziter Form.

Definiere: $F(t,x)=3tx+e^t+\sin x-1\quad\Longrightarrow\quad\frac{\partial F}{\partial x}(0,\pi)=-1\neq 0.$

Es folgt aus dem <u>Satz über implizite Funktionen</u>, dass die Gleichung $F(t,x)=0$ eine Lösung $x=x(t)$ in einer <u>Umgebung von $(t_0,x_0)=(0,\pi)$</u> besitzt.

Beispiel $\boxed{x + 2t\frac{dx}{dt} = 0}$ mit $M(t,x) = x$ und $N(t,x) = 2t$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial N}{\partial t} = 2$$

daher ist diese gDGL nicht exakt!

Aber multipliziere die gDGL mit x

$$\Longrightarrow \quad x^2 + 2xt\frac{dx}{dt} = 0$$

Dann gilt $\frac{\partial}{\partial x}\{x^2\} = 2x = \frac{\partial}{\partial t}\{2xt\} \quad \Longrightarrow$ die neue (Version der) gDGL ist exakt und besitzt die Lösungskurven

$$\psi(t,x) = x^2 \cdot t \equiv K \qquad \text{(Konstante)}.$$

Der Multiplikator x hier hat die Wirkung eines integrierenden Faktors!

Eine Funktion $\mu : D \to \mathbb{R}$ heißt integrierender Faktor der gDGL

$$M(t,x) + N(t,x)\frac{dx}{dt} = 0$$

auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$, wenn gilt:

$$\mu(t,x) \neq 0 \quad \text{für alle } (t,x) \in D$$

und die gDGL

$$\mu(t,x) \cdot M(t,x) + \mu(t,x)N(t,x)\frac{dx}{dt} = 0$$

exakt ist, d.h. falls

$$\frac{\partial}{\partial x}\{\mu(t,x) \cdot M(t,x)\} = \frac{\partial}{\partial t}\{\mu(t,x) \cdot N(t,x)\}$$

$\Longrightarrow$ der integrierende Faktor μ genügt der partiellen Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial x} - N\frac{\partial \mu}{\partial t} + \left\{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}\right\}\mu = 0}$$

Im allgemeinen ist diese PDGL nicht einfacher als die gegebene gDGL zu lösen !

Aber es gibt nützliche Sonderfälle, z.B. wenn

$$\frac{1}{M(t,x)}\left\{\frac{\partial M}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial N}{\partial t}(t,x)\right\}$$

nur von x abhängt (und nicht von t!), dann existiert ein integrierender Faktor der Form $\mu = \mu(x)$. Dieser IF ist Lösung der linearen gDGL

$$\frac{d\mu}{dx} + \frac{1}{M}\left\{\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}\right\} \cdot \mu = 0.$$

Beispiel Betrachte nochmal die gDGL

$$x + 2t\frac{dx}{dt} = 0$$

von oben mit $M(t,x) = x$ und $N(t,x) = 2t$. Hier gilt

$$\frac{1}{M} \cdot \left\{ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t} \right\} = \frac{1}{x} \cdot \{1 - 2\} = -\frac{1}{x}$$

Ein IF $\mu = \mu(x)$ löst die gDGL

$$\frac{d\mu}{dx} - \frac{1}{x}\mu = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(x) = x.$$

Andere nützliche Sonderfälle sind $\mu = \mu(t)$ oder $\mu = \mu(s)$ mit $s = x^p \cdot t^q$, aber meistens müßen wir irgendwie einen geeigneten Integrierenden Faktor raten !

Beispiel $\boxed{x^2 + tx - t^2\frac{dx}{dt} = 0}$ homogene gDGL !

Hier lauten $M(t,x) = x^2 + tx$ und $N(t,x) = -t^2$ mit

$$\frac{\partial M}{\partial t} = 2x + t \neq \frac{\partial N}{\partial t} = -2t.$$

Multipliziere die gDGL mit $\mu(t,x) = \dfrac{1}{tx^2}$

$$\Longrightarrow \qquad \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{x}\right) - \frac{t}{x^2}\frac{dx}{dt} = 0$$

mit

$$M^*(t,x) = \frac{1}{t} + \frac{1}{x}, \qquad N^*(t,x) = -\frac{t}{x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial M^*}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial N^*}{\partial t}$$

$\Longrightarrow$ dh die neue Version der gDGL ist exakt

Löse

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = M^* = \frac{1}{t} + \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = N^* = -\frac{1}{x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \psi(t,x) = \ln t + \frac{t}{x}.$$

mit Lösungskurven

$$\psi(t,x) = \ln t + \frac{t}{x} \equiv K \qquad \text{(Konstante)}$$

Diese sind auch Lösungskurven der ursprünglichen gDGL in einem Gebiet wo $\mu = \dfrac{1}{tx^2}$ „nett“ ist, d.h., für $t \neq 0$, $x \neq 0$.

Vorsicht: $x(t) \equiv 0$ ist eine Lösung der ursprünglichen gDGL, die nicht durch eine solche Lösungskurve zu finden ist!

Kapitel 6

Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die Standardform einer linearen geẅohnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$\underbrace{1 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + a \cdot \frac{dx}{dt} + b \cdot x}_{\text{konstante Koeffizienten}} = c(t)$$

wobei die Treibkraftfunktion $c(t)$ von t abhängen darf!

wichtig Der Koeffizient von $\frac{d^2x}{dt^2}$ ist 1 in der Standardform.

Als Abkürzung schreiben wir $L[x] = c(t)$ mit dem Differentialoperator zweiter Ordnung

$$L[x] = \frac{d^2x}{dt^2} + a\,\frac{dx}{dt} + b\,x.$$

Die gDGLL heißt homogen, falls $c(t) \equiv 0$, sonst inhomogen, d.h.

$$\begin{aligned} L[x] &= 0 && \text{homogene gDGL} \\ L[x] &= c(t) && \text{inhomogene gDGL} \end{aligned}$$

Hilfssatz 6.1
L ist linearer Operator, d.h.

$$L[Ax_1 + Bx_2] = A\,L[x_1] + B\,L[x_2]$$

für alle 2-mal differenzierbaren Funktionen $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ und alle Konstanten A, $B \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

Beweis: Die Ableitungen $\frac{d}{dt}$ und $\frac{d^2}{dt^2}$ sind lineare Operatoren. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} L[Ax_1 + Bx_2] &= \frac{d^2}{dt^2}\,(Ax_1 + Bx_2) + a\,\frac{d}{dt}\,(Ax_1 + Bx_2) + b\,(Ax_1 + Bx_2) \\ &= A\,\frac{d^2x_1}{dt^2} + B\frac{d^2x_2}{dt^2} + aA\frac{dx_1}{dt} + aB\frac{dx_2}{dt} + bAx_1 + bBx_2 \\ &= A\left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + a\frac{dx_1}{dt} + bx_1\right) + B\left(\frac{d^2x_2}{dt^2} + a\frac{dx_2}{dt} + bx_2\right) \\ &= AL[x_1] + B\,L[x_2] \end{aligned}$$

■

Korollar 6.2
Jede lineare Kombination homogener Lösungen ist auch homogene Lösung.

Beweis:

$$L[Ax_1 + Bx_2] = AL[x_1] + BL[x_2] = A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0$$

falls x_1, x_2 homogene Lösungen sind.

Definition 6.3
Zwei Funktionen x_1, $x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißen unabhängig, wenn gilt

$$Ax_1(t) + Bx_2(t) \equiv 0 \qquad \forall \quad t \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad A \equiv B \equiv 0$$

Satz 1 *Seien x_1 und x_2 zwei unabhängige Lösungen der homognen gDGL $L[x] = 0$. Dann ist jede andere homogene Lösung in der Form*

$$\boxed{x_n(t) = A\tilde{x_1}(t) + B\tilde{x_2}(t)} \qquad \qquad \textit{allgemeine homogene Lösung}$$

mit geeigneten Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$.

Beweis: Später bei dem vektorwertigen Fall. (Warum?)

Hinweis

$$\frac{\partial^2 x}{dt^2} \equiv 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = At + B \qquad \text{allgemeine Lösung!}$$

wobei Aund B beliebige Integrationskonstanten sind – zwei mal integrieren ! Hier sind

$$\tilde{x_1}(t) = t, \quad \tilde{x_2}(t) \equiv 1$$

unabhängige Lösungen. ■

Frage *wie können wir 2 unabhängige homogene Lösungen finden ?* (Antwort — später)

Hilfssatz 6.4
Seien x_1 und x_2 Lösungen der inhomogenen gDGL $L[x] = c(t)$. Dann ist $x = x_1 - x_2$ eine Lösung der homogenen gDGL $L[x] = 0$.

Beweis: Wegen der Linearität des Operators L gilt

$$L[x] = L[x_1 - x_2] = L[x_1] - L[x_2] = c(t) - c(t) = 0.$$

■

Satz 2 *Seien x_1 und x_2 zwei unabhängige Lösungen der homogenen gDGL $L[x] = 0$ und sei x_2 eine gegebene, sonst beliebige Lösung der inhomogenen gDGL $L[x] = c(t)$.*

Dann lautet die allgemeine homogene Lösung

$$\boxed{x(t) = A\tilde{x_1}(t) + B\tilde{x_2}(t) + x_s} \qquad \text{(**)}$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$, d.h. jede inhomogene Lösung ist der Form (**)

Beweis: Jedes $x(t)$ der Form (**) ist inhomogene Lösung , weil

$$\begin{aligned} L[x] &= L[A \cdot \tilde{x_1} + B \cdot \tilde{x_2} + x_s] \\ &= A \cdot L[\tilde{x_1}] + B \cdot L[\tilde{x_2}] + L[x_s] \qquad \text{linear!} \\ &= \underbrace{A \cdot 0 + B \cdot 0}_{\text{homogene Lösungen}} + \underbrace{c(t)}_{\text{inhomogene Lösung!}} \\ &= c(t) \end{aligned}$$

Sei jetzt $x_s(t)$ eine beliebige inhomogene Lösung. Von dem Hilfssatz 2 ist $x(t) - x_s(t)$ dann einen homogene Lösung der (allgemeinen) Form $A \cdot \tilde{x_1}(t) + B \cdot \tilde{x_2}(t)$ für geeignete Konstanten A und B, d.h. $x(t) - x_s(t) = A\tilde{x_1}(t) + B\tilde{x_2}(t)$.

$$\Longrightarrow \quad x(t) \quad \text{ist der Form } (**)$$

■

Lösungsansätze: homogener Fall $\quad \boxed{0 = L[x] = \frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx}$

Probiere eine Lösung der Form

$$\boxed{x(t) = e^{\lambda t}}$$

wobei λ eine Konstante ist, die wir finden müssen.

Warum? Lineare gDGLen erster Ordnung haben Lösungen dieser Form ! Warum? Warum nicht! — dies ist nicht so blöd, siehe später!

$$x = e^{\lambda t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \lambda \cdot e^{\lambda t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}.$$

Dies ist eine Lösung, wenn $0 = L[e^{\lambda t}]$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. wenn

$$0 = \lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + be^{\lambda t} = e^{\lambda t}\left[\lambda^2 + a\lambda + b\right] \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0} \qquad \underline{\text{charakteristische Gleichung}}$$

mit Nullstellen

$$\Longrightarrow \qquad \lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Es gibt <u>3 Möglichkeiten</u>

I $\quad a^2 - 4b > 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2$ <u>reell</u> $\lambda_1 \neq \lambda_2$

II $\quad a^2 - 4b = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^* = \frac{a}{2}$ <u>reell</u>, doppelt

III $\quad a^2 - 4b < 0 \quad \Longrightarrow$ komplex konjugiertes Paar

$$\lambda_1 = \alpha + \imath\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - \imath\beta \qquad \text{mit} \quad \alpha = -\frac{a}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \neq 0.$$

Satz 3 *Die <u>allgemeine homogene Lösung</u> lautet*

$$x(t) = \begin{cases} A\,e^{\lambda_1 t} + B\,e^{\lambda_2 t}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \underline{\textit{reell}} \\ A\,e^{\lambda^* t} + Bte^{\lambda^* t}, & \lambda_1 = \lambda_2 \quad \underline{\textit{reell}} \\ A\,e^{\alpha t}\cos\beta t + B\,e^{\alpha t}\sin\beta t, & \lambda_{1,2} = \alpha \pm \imath\beta \end{cases}$$

mit beliebigen Konstanten A, $B \in \mathbb{R}$.

Beweis:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, <u>reell</u> $\boxed{\tilde{x_1}(t) = e^{\lambda_1}}$, $\boxed{\tilde{x_2}(t) = e^{\lambda_2 t}}$ sind unabhängige homogene Lösungen

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^*$ <u>reell</u> $\boxed{\tilde{x_1}(t) = e^{\lambda^* t}}$ ist eine homogene Lösung

Eine andere homogene Lösung,die unabhängig ist, lautet $\boxed{\tilde{x_2}(t) = te^{\lambda^* t}}$, weil

$$\begin{aligned} L[te^{\lambda^* t}] &= \frac{d^2}{dt^2}[te^{\lambda^* t}] + a\frac{d}{dt}[t\,e^{la^* t}] + bte^{\lambda^* t} \\ &= \frac{d}{dt}[e^{\lambda^* t} + \lambda^* te^{\lambda^* t}] + a[e^{la^* t} + \lambda^* te^{\lambda^* t}] + bte^{\lambda^* t} \\ &= te^{\lambda^* t}[(\lambda^*)^2 + a^{\lambda^*} + b] + e^{\lambda^* t}\,[2\lambda^* + a] \\ &= 0 \end{aligned}$$

d.h., charakteristische Gleichung, sowie $\lambda^* = -\frac{a}{2}$.

3) $\lambda_1 = \alpha + \imath\beta$, $\lambda_2 = \alpha - \imath\beta$

$$\begin{cases} \tilde{z}_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{(\alpha + \imath\beta)t} = e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\cos\beta t + \imath e^{\alpha t}\sin\beta t \\ \tilde{z}_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{(\alpha - \imath\beta)t} = \ e^{\alpha t} \cdot e^{\imath\beta t} = e^{\alpha t}\cos\beta t - \imath e^{\alpha t}\sin\beta t \end{cases}$$

sind 2 komplexwertige unabhängige homogene Lösungen, dh mit $L[\tilde{z}_i] = 0$ für $i = 1, 2$.

Die Linearität von L ergibt (oder mit direktem Beweis)

$$0 = L[\tilde{z}_1] = L[e^{\alpha t}\cos\beta t + \imath e^{\alpha t}\sin\beta t] = \underbrace{L[e^{\alpha t}\cos\beta t]}_{\text{reellwertig}} + \imath \underbrace{L[e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t]}_{\text{reellwertig}} = 0 + \imath 0$$

$$\Longrightarrow \qquad L[e^{\alpha t}\cos\beta t] = 0 \quad \underline{\text{und}} \quad L[e^{\alpha t}\sin\beta t] = 0$$

$\Longrightarrow$ $\tilde{x}_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ und $\tilde{x}_2(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$ sind zwei reellwertige unabhängige homogene Lösungen.

Lösungsansätze: inhomogener Fall

Wir brauchen auch eine Lösung $x_s(t)$ der inhomogenen gDGL $L[x] = c(t)$

Die Lösungsansätze hängen von der Form von $c(t)$ ab.

1) $\boxed{c(t) \text{ ist keine homogene Lösung}}$ $\Longrightarrow$ probiere eine Lösung x_s derselben Form der Funktion $c(t)$.

   (i) $c(t)$ Polynom $\Longrightarrow$ $x_s(t)$ Polynom des selben Grades

   (ii) $c(t) = ce^{dt}$ $\quad (d \neq \lambda)$ $\Longrightarrow$ $x_s(t) = Ee^{dt}$

   (iii) $c(t) = C\cos\beta t + D\sin\beta t$ $\Longrightarrow$ $x_s(t) = E\cos\beta t + F\sin\beta t$
   (Vorsicht die beiden Terme sind notwendig — auch falls C oder $D = 0$)

2) $\boxed{c(t) \text{ ist eine homogene Lösung, aber } t\cdot c(t) \text{ ist keine homogene Lösung}}$

   d.h. $L[c(t)] \equiv 0$ aber $L[tc(t)] \neq 0$ $\qquad$ Nimm $x_s(t) = t$ mal die obigen Vorschläge !

3) $\boxed{c(t) \text{ und } t\cdot c(t) \text{ sind homogene Lösungen}}$

   d.h. $L[c(t)] \equiv L[t\cdot c(t)] \equiv 0$ $\qquad$ Nimm $x_s(t) = t^2$ mal Vorschlag in Teil 1).

Alles hier ist sehr ad hoc! Später werden wir eine vollständige Lösungsmethode entwickekln.

Beispiel 6.5 $\boxed{L[x] = \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} - 3x}$

homogener Fall $\quad L[x] = 0 \qquad$ probiere $x = e^{\lambda t}$

$$\Longrightarrow \qquad \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \lambda_1 = +1, \lambda_2 = -3 \qquad \text{reell, ungleich}$$

$\Longrightarrow$ allg. homogene Lösung $\boxed{x_n(t) = Ae^t + Be^{-3t}}$

inhomogener Fall (1) $\boxed{c(t) = t}$ keine homogene Lösung !

$\Longrightarrow$ probiere $x_2(t) = ct + D$ (Polynom ersten Grades)

$$t \equiv L[x_s(t)] = 0 + 2C - 3(Ct + D) = -3Ct + (2C - 3D)$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} t^1 : \quad 1 &= -3C \\ t^0 : \quad 0 &= 2C - 3D \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad C = -\frac{1}{3}, D = -\frac{2}{9} \quad \Longrightarrow$ eine inhomogene Lösung lautet $\boxed{x_s(t) = -\frac{1}{3}t - \frac{2}{9}}$

$\Longrightarrow$ allgemeine inhomogene Lösung

$$\boxed{x(t) = Ae^t + Be^{-3t} - \frac{1}{3}t - \frac{2}{9}}$$

inhomogener Fall (2) $\boxed{c(t) = e^t}$ homogene Lösung !

$\Longrightarrow$ probiere $x_s(t) = Ete^t$ mit E unbekannt

$$\begin{aligned} e^t = L[x_s(t)] &= L[Ete^t] \\ &= \frac{d^2}{dt^2}(Ete^t) + 2\frac{d}{dt}(Ete^t) - 3Ete^t \\ &= (Ete^t + 2Ee^t) + (2Ete^t + 2Ee^t) - 3Ete^t = E \cdot e^t \qquad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $4E = 1$ bekannte inhomogene Lösung $\boxed{x_s(t) = \frac{1}{4}te^t}$

$\Longrightarrow$ allgemeine inhomogene Lösung $\boxed{x(t) = Ae^t + Be^{-3t} + \frac{1}{4}te^t}$

Kapitel 7

Variationen der Konstanten

Eine inhomogene lineare gDGL $L[x] = c(t)$ besitzt eine allgemeine Lösung der Form

$$x(t) = A\tilde{x}_1(t) + B\tilde{x}_2(t) + x_s(t)$$

mit Konstanten A, $B \in \mathbb{R}$, wobei $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$ zwei unabhngige homogene Lösungen sind, d.h. $L[\tilde{x}_i] = 0$, und x_s eine bekannte inhomogene Lösung ist.

Durch den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ können wir immer die zwei unabhngigen Lösungen $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$ finden. Wir haben auch verschiedene Lösungsrezepte für die inhomogene Lösung x_s, aber im Allgemeinen sind sie etwa ad hoc. Die Methode Variationen der Konstanten ist eine systematische Methode, die in jedem Fall eine inhomogene Lösung liefert.

Die allgemeine homogene Lösung lautet

$$x(t) = A\tilde{x}_1(t) + B\tilde{x}_2(t)$$

mit beliebigen Konstanten A, $B \in \mathbb{R}$.

Eine solche lineare Kombination kann nie eine inhomogene Lösung sein, dh wenn A und B Konstanten sind. D'Alemberts Vorschlag war, Funktionen $A(t)$ und $B(t)$ statt Konstanten zu benutzen, dh suche eine inhomogene Lösung der Form

$$\boxed{x_s(t) = A(t)\,\tilde{x}_1(t) + B(t)\tilde{x}_2(t)}$$

mit geeigneten Funktionen $A(t)$ und $B(t)$, die man finden muss.

Wir haben 2 Unbekannte $A(t)$ und $B(t)$, die der Bedingung

$$L[A(t)\,\tilde{x}_1(t) + B(t)\,\tilde{x}_2(t)] = c(t)$$

genügen, dh eine inhomogene Lösung aufbauen.

Wir brauchen eine zweite Bedingung, um $A(t)$ und $B(t)$ festzulegen. Diese Bedingung können wir zu unserem Vorteil auswählen.

Die Abkürzung $'$ bedeutet $\dfrac{d}{dt}$ Die Produktregel ergibt (nach Umschreibung!)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[A(t)\,\tilde{x}_1(t) + B(t)\,\tilde{x}_2(t)] &= \left\{A(t)\tilde{x}_1'(t) + B(t)\tilde{x}_2'(t)\right\} \\ &= \quad + \left\{A'(t)\tilde{x}_1(t) + B'(t)\tilde{x}_2(t)\right\}.\end{aligned}$$

Wir müssen diesen Ausdruck nochmal differenzieren - echt mühsam !

Aber wir können alles vereinfachen, wenn wir voraussetzen, dass

$$\boxed{A'(t)\tilde{x}_1(t) + B'(t)\tilde{x}_2(t) \equiv 0} \qquad (1)$$

ist. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}[A(t)\tilde{x}_1(t) + B(t)\tilde{x}_2(t)] = A(t)\tilde{x}_1'(t) + B(t)\tilde{x}_t')$$

Differenziere nochmal

$$\frac{d^2}{dt^2}[A(t)\tilde{x}_1(t) + B(t)\tilde{x}_2(t)] = \frac{d}{dt}[A(t)\tilde{x}_1'(t) + B(t)\tilde{x}_2'(t)]$$

Die Produktregel ergibt hier

$$\frac{d^2}{dt^2}[\text{wie oben}] = A(t)\tilde{x}_1''(t) + A'(t)\tilde{x}_1'(t) + B(t)\tilde{x}_2''(t) + B'(t)\tilde{x}_1'(t)$$

Die lineare Kombination $A(t)\tilde{x}_1(t) + B(t)\tilde{x}_2(t)$ ist eine homogene Lösung

$$\begin{aligned}
c(t) &= L[A(t)\tilde{x}_1(t) + B(t)\tilde{x}_2(t)] \\
&= \frac{d^2}{dt^2}[A(t)\tilde{x}_1(t) + B(t)\tilde{x}_2(t)] \\
&\quad + \frac{d}{dt}[A(t)\tilde{x}_1(t) + B(t)\tilde{x}_2(t)] \\
&\quad + b \cdot [A(t)\tilde{x}_1(t) + B(t)\tilde{x}_2(t)] \\
&= A(t)\tilde{x}_1''(t) + A'(t)\tilde{x}_1'(t) + B(t)\tilde{x}_2''(t) + B'(t)\tilde{x}_2'(t) \\
&\quad + a[A(t)\tilde{x}_1'(t) + B(t)\tilde{x}_2'(t)] + b\,[A(t)\tilde{x}_1(t) + B(t)\tilde{x}_2/t)]
\end{aligned}$$

unter der Voraussetzung, dass (1) gilt.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad c(t) &= A(t)[\tilde{x}_1''(t) + a\tilde{x}_1'(t) + b\tilde{x}_1(t)] \\
&\quad + B(t)[\tilde{x}_2''(t) + a \cdot \tilde{x}_2'(t) + b\tilde{x}_2(t)] \\
&\quad + A'(t)\tilde{x}_1'(t) + B'(t)\tilde{x}_2'(t) \\
&= A(t) \cdot 0 + b(t)) \cdot 0 + A'(t)\tilde{x}_1'(t) + B'(t)\tilde{x}_2'(t)
\end{aligned}$$

weil $L[\tilde{x}_1] = 0$ und $L[\tilde{x}_2] = 0$ homogene Lösungen sind

$$\Longrightarrow \quad \boxed{c(t) = A'(t)\tilde{x}_1'(t) + B'(t)\tilde{x}_2'(t)} \qquad (2)$$

$\Longrightarrow \quad x_s(t) = A(t)\tilde{x}_1(t) + B'(t)\tilde{x}'_2(t)$ ist <u>inhomogene</u> Lösung, wenn $A(t)$ und $B(t)$ den Bedingungen (1) und (2) genügen

$$(1) \quad A'(t)\tilde{x}_1(t) + B'(t)\tilde{x}_2(t) \;=\; 0$$

$$(2) \qquad A'(t)\tilde{x}'_1(t) + B'(t)\tilde{}'_2(t) = c(t)$$

oder in Vektor-Matrix-Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) & \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}'_1(t) & \tilde{x}'_2(t) \end{bmatrix}}_{\text{Wronski-Matrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{bmatrix}}_{\text{Unbekannten}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ c(t) \end{bmatrix}}_{\text{bekannt}}$$

Die Wronski-Matrix ist bekannt und ist <u>invertierbar</u>, weil $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$ unabhängig sind. (Beweis: Werte die Determinanten aus !)

$$\Longrightarrow \quad \underline{\text{eindeutig lösbar}} \text{ für } A'(t) \text{ und } B'(t)$$

Wir müssen dann integrieren, um $A(t)$ und $B(t)$ zu finden — hier können wir die <u>Integrationskonstanten</u> gleich 0 setzen, weil die sonst erhaltenen Terme homogene Lösungen sind.

<u>Beispiel</u> $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} - 3x = e^t}$

Die homogene DGL besitzt die allgemeine Lösung

$$x(t) = Ae^t + Be^{-3t} \qquad \text{beliebige} \quad A, B \in \mathbb{R},$$

weil $\tilde{x}_1(t) = e^t$ und $\tilde{x}_2(t) = e^{-3t}$ zwei unabhängige homogene Lösungen sind.

Wir suchen eine inhomogene Lösung der Form

$$x_s(t) = A(t)\tilde{x}_1(t) + B(t)\tilde{x}_2(t) = A(t)e^t + B(t)e^{-3t}$$

Von der Methode Variationen der Konstanten müssen wir das folgende Gleichungssystem lösen

$$\begin{aligned} A'(t)\tilde{x}_1(t) + B'(t)\tilde{x}_2(t) &= 0 \\ A'(t)\tilde{x}_1(t) + B'(t)\tilde{x}_2(t) &= e^t \end{aligned}$$

In diesem Fall lautet das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A'(t)e^t + B'(t)e^{-3t} &= 0 \\ A'(t)e^t - 3B'(t)e^{-3t} &= e^t \end{aligned}$$

$3\times$ (1) plus (2) $\implies A'(t)e^t = e^t \qquad \implies \quad \boxed{A'(t) \equiv \frac{1}{4}}$

dann von (1) $\quad B'(t) = -A'(t)e^{4t} \qquad \implies \quad \boxed{B'(t) \equiv -\frac{1}{4}e^{4t}}$

Integriere $\implies \quad A(t) = \frac{1}{4}t + K_1$ und $B(t) = -\frac{1}{16}e^{4t} + K_2$

wobei K_1, K_2 beliebige Integrationskonstanten sind. Daher gilt

$$\begin{aligned} x_s(t) &= A(t)e^t + B(t)e^{-3t} \\ &= \left(\frac{1}{4}t + K_1\right)e^t + \left(-\frac{1}{16}e^{4t} + K_2\right)e^{-3t} \\ &= \frac{1}{4}te^t + \underbrace{\left(K_1 - \frac{1}{16}\right)e^t + K_2 e^{-3t}}_{\text{homogene Lösungen}} \end{aligned}$$

Wir können nehmen: $\quad \boxed{x_s(t) = \frac{1}{4}t \cdot e^t}$

entweder $K_1 = \frac{1}{16}$ und $K_2 = 0$ setzen oder die homogenen Lösungen hier mit der allgemeinen homogenen Lösung zusammenschreiben

$\implies$ die allgemeine inhomogene Lösungen lautet

$$\boxed{x(t) = A\,e^t + Be^{-3t} + \frac{1}{4}t\,e^t}$$

7.0.1 Euler-DGL zweiter Ordnung

Die Standardform einer Euler-Differentialgleichung zweiter Ordnung lautet

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + a\,t\,\frac{dx}{dt} + b\,x = e(t)$$

wobei a und b Konstanten sind — diese Euler–DGL ist offensichtlich linear.

Wir können eine Euler-DGL in eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten umschreiben.

Betrachte die Substitution $\quad \boxed{s = \ln t}$ mit $\boxed{t = e^s}$

und definiere

$$\boxed{y(s) = x(e^s)}$$

wobei $x(t)$ die Lösung der Euler-DGList.

Von der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds}x(e^{-s}) = \frac{dx}{dt}\frac{d}{ds}e^s = \frac{dx}{dt}\,e^s = t\,\frac{dx}{dt} \qquad \text{weil} \quad t = e^s.$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{\frac{dy}{ds} = t\,\frac{dx}{dt}}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{ds^2} &= \frac{d}{ds}\left[\frac{dy}{ds}\right] \\
&= \frac{dt}{ds}\,\frac{dx}{dt} + t\frac{d}{ds}\left[\frac{dx}{dt}\right] \qquad \text{Produktregel} \\
&= \frac{dt}{ds}\,\frac{dx}{dt} + t\,\frac{d^2x}{dt^2}\,\frac{dt}{ds} \qquad \text{Kettenregel} \\
&= t\,\frac{dx}{dt} + t^2\frac{d^2x}{dt^2 s} \qquad \text{weil} \quad \frac{dt}{ds} = t \\
&= \frac{dy}{ds} + t^2\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{weil} \quad \frac{dy}{ds} = t\frac{dx}{dt}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{t^2\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}}$$

Betrachte jetzt die homogene Version der Euler-DGL:

$$\begin{aligned}
0 &= t^2\frac{d^2x}{dt^2} + a\,t\,\frac{dx}{dt} + b\,x \\
&= \left[\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\right] + a\left[\frac{dy}{ds}\right] + by \\
&= \frac{d^2y}{ds^2} + (a-1)\frac{dy}{ds} + by
\end{aligned}$$

dh $y = y(s)$ genügt einer linearen DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Lösungsansatz $y(s) = e^{\lambda s}$ $\qquad \Longrightarrow \boxed{\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0}$

oder direkt mit $x(t)$ und der Euler-DGL:

$$y(s) = e^{\lambda s} = (e^s)^\lambda \qquad \text{aber} \quad y(s) = x(e^s) \quad \text{mit} \quad t = e^s \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x(t) = t^\lambda}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \lambda t^{\lambda-1}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-1} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\text{Euler DGL}} \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
0 &= t^2\frac{d^2x}{dt^2} + a\,\frac{dx}{dt} + bx \\
&= t^2\,\lambda(\lambda-1)t^{\lambda-1} + at\,t^{la-1} + bt^\lambda \\
&= t^\lambda[\lambda(\lambda-1) + a\lambda + b]
\end{aligned}$$

Aber $t^\lambda \not\equiv 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(\lambda-1) + a\lambda + b = \lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0.$

Die allgemeine homogene Lösung der Euler-DGL zweiter Ordnung lautet

$$x_h(t) = \begin{cases} At^{la_1} + Bt^{\lambda_2} & \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \underline{\text{reell}} \\ At^{\lambda^*} + Bt^{\lambda^*} \cdot \ln t & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda^* \quad \underline{\text{reell}} \\ At^{\alpha} \cdot \cos(\beta \ln s) + Bt^{\alpha} \cdot \sin(\beta \ln s) & \lambda_1 = \alpha + \imath\beta = \overline{\lambda_2} \end{cases}$$

d.h. eine Übersetzung von dem Fall mit konstanten Koeffzienten mit $t = e^s$ oder $s = \ln t$

Kapitel 8

Existenz– und Eindeutigkeitstheorie

Im Allgemeinen sind gewöhnliche Differentialgleichungen nicht explizit lösbar!

Dann müsen wir versuchen, Approximationen solcher Lösungen zu finden.

Aber wie wissen wir, dass eine Anfangswertaufgabe

$$(AWA) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

zwar eine Lösung besitzt oder wie viele Lösungen ?

Existenz– und Eindeutigkeitssätze geben uns diese Information. Ein typischer EE-Satz lautet

Satz 4 *Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ offen und sei $f : (\gamma, \delta) \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ stetig differenziebar. Dann besitzt die AWA eine eindeutige Lösung*

$$v : (t_0 - \varepsilon(t_0, x_0), t_0 + \varepsilon(t_0, x_0)) \subset (\gamma, \varepsilon) \to \mathcal{U}$$

für jeden Anfangswert $(t_0, x_0) \in (\gamma, \delta) \times \mathcal{U}$. d.h. das Existenzintervall hängt von dem Anfangswert ab.

Die stetige Differenzierbarkeit der Vektorfeldfunktion f ist eine hinreichende Bedingung für die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung der AWA. Schwächere Bedingungen sind auch möglich (später!)

Aber ohne die Stetigkeit der Vektorfeldfunktion f gibt's nicht immer eine Lösung

Beispiel $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{t} \quad \text{mit} \quad x(0) = 1}$

d.h. eine DGL mit getrennten Variablen $\Longrightarrow$ Lösungen $\boxed{x(t) = K \cdot t}$ $\forall K \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ keine Lösung mit $x(0) = 1$! (Der Fall $K = \infty$ gibt keine Lösung !)

Warum? Hier ist $f(t,x) = \dfrac{x}{t}$ $\Longrightarrow$ nicht stetig definiert für $t = 0$!

Auch ohne ein bichen mehr als die Stetigkeit der Vektorfeldfunktion f gibt's nicht immer eine endgültige Lösung

Beispiel $\boxed{\frac{dx}{dt} = 3x^{\frac{2}{3}} \quad \text{mit} \quad x(0) = 0}$ eine GDL mit getrennten Variablen

$\Longrightarrow \quad t+K = \int^t dt = \int^x \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx = x^{\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow$ Lösungen $\boxed{x(t) = (t+K)^3}$ $\forall\, K \in \mathbb{R}$.

Insbesondere: mit dem Anfangswert $x(0) = 0 \Longrightarrow$ Lösung $\boxed{x(t) = t^3}$

Aber die Ruhelage $\boxed{x(t) \equiv 0}$ ist auch eine Lösung dieser AWA.

Diese AWA besitzt tatsächlich unendlich viele Lösungen mit dem Anfangswert $x(0) = 0$.

$$x_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} (t+\beta)^3, & t \leq -\beta \\ 0, & -\beta \leq t \leq d \\ (t-\alpha)^3, & t \geq \alpha \end{cases} \qquad \text{für alle} \quad \alpha, \beta \geq 0$$

Warum? $f(t,x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ ist stetig für $x = 0$, aber $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -2x^{-\frac{1}{3}}$ ist nicht stetig / definiert dort !

Der obige Existenz-Eindeutigkeitssatz sagt nichts darüber aus wie groß das Existenzintervall

$$(t_0 + \delta(t_0, x_0), t_0 + \delta(t_0, x_0))$$

ist oder sein kann. Dies ist auch nicht klar von der Form der Vektorfeldfunktion f zu sehen.

Beispiel $\boxed{\frac{dx}{dt} = x^2 \quad \text{mit} \quad x(0) = x_0 > 0}$ eine DGL mit getrennten Variablen.

Die Vektorfeldfunktion $f(t,x) = x^2$ ist stetig differenzierbar (überall!)

$\Longrightarrow$ eindeutige Lösung $\boxed{x(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{x_0} - t}}$

Das maximale Existenzintervall hier ist $-\infty < t < \frac{1}{x_0}$

Aber warum $\frac{1}{x_0}$ hier? Man sieht nichts davon in der Vektorfeldfunktion.

Der Beweis des Existenz-Eindeutigkeitssatzes ist nicht konstruktiv, d.h. er sagt nichts darüber aus wie wir die Lösungen finden können. Dennoch sind Existenz-Eindeutigkeitssätze sehr nützlich, z.B.

1) ein mathematisches Modell ist dann realistisch.

Jacques Hadamard sprach über sachgerecht gestellte Probleme, d.h. mit Existenz, Eindeutigkeit sowie stetiger Abhängigkeit von „Daten“ wie Parametern und Anfangswerten.

2) es ist dann bedeutungsvoll und wertvoll, eine numerische Approximation der Lösung zu suchen

3) viele nützliche qualitative Aussagen über die Lösungen sind dann möglich

   a) Lösungskurven dürfen sich nicht überschneiden!

   b) Lösungskurven einer autonomen DGLen sind zeittranslationsinvariant d.h.

$$x(t-t_0;0,x_0) \equiv x(t;t_0,x_0)$$

d.h. die Lösungen hängen nur von der verlaufenen Zeit $t-t_0$ ab.

Eine DGL heißt autonom, wenn $f(t,x) \equiv f(x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, d.h. die Vektorfeldfuntion f hängt nicht explizit von t ab.
Beweis Sei $x(t;t_0,x_0)$ die eindeutige Lösung der AWA

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad \text{mit} \qquad x(t_0) = x_0$$

und definiere $z(t) = x(t-t_0;0,x_0)$. Dann lautet

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}z(t) &= \frac{d}{dt}x(t-t_0;0,x_0) \\
&= \frac{d}{ds}x(s;0,x_0)\cdot\frac{ds}{dt} \qquad \text{wo} \quad s = t-t_0 \\
&= f(x(s;0,x_0))\cdot 1 \\
&= f(x(t-t_0;0,x_0)) = f(z(t))
\end{aligned}$$

d.h. $z(t)$ ist auch Lösung der DGL und $z(t_0) = x(t_0-t_0;0,x_0) = x(0;0,x_0) = x_0$.

$\Longrightarrow$ $z(t)$ ist auch eine Lösung der obigen AWA, für welche die Lösung eindeutig ist.

8.0.2 Richtungsfelder

Richtungsfelder sind eine graphische Methode zur Approximation der Lösungen einer skalaren DGL

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}^1.$$

Sei f stetig differenzierbar. $\Longrightarrow$ es existiert eine eindeutige Lösung $x(t,t_0,x_0)$ für jeden Anfangswert $x(t) = x_0$.

Die Tangentengerade zu der entsprechenden Lösungskurve im Punkt (t_0,x_0) hat die Steigung

$$\boxed{\tan\phi_0 = f(t_0,x_0)}$$

$\Longrightarrow$ je größer $\|f(t_0, x_0)\|$ desto steiler die Tangentengerade.

Wir können eine Schar von Linienelementen durch gewählte Punkte skizzieren, mit Neigungswinkel $\phi_0 = \tan^{-1} f(t_0, x_0)$ zu jedem Punkt, und dann versuchen, einige Lösungskurven approximativ zu skizzieren. Dieses Bild heißt Richtungsfeld

siehe MAPLE

Wir sollen dies natürlich systematisch durchführen, z.B. mit den Fakten

1) EE-Sätze $\Longrightarrow$ Lösungskurven dürfen sich nie überschneiden
2) konstante Lösungskurven sind die Grenzen verschiedener invarianten Lösungsgebiete, dh. man bleibt immer in einem bestimmten Gebiet.
3) für autonome DGLen hängt $\phi_0 = \tan^{-1}(x_0)$ nicht von t_0 ab $\Longrightarrow$ die selbe Neigung auf horizontalen Geraden $x \equiv$ Konstante !

Beispiel $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = 4x(1-x)}$ d.h. mit Vectorfeldfunktion $f(t, x) = 4x(1-x)$

- stetig differenzierbar $\Longrightarrow$ Existenz-Eindeutigkeit
- autonom $\Longrightarrow$ konstante Neigung auf horizontalen Geraden

Ruhelagen $f(t, x) = 4x(1-x) = 0 \Longrightarrow x = 0{,}1 \Longrightarrow x(t) \equiv 0$ und $x(t) \equiv 1$ sind Lösungen

$\Longrightarrow$ invariante Lösungsgebiete

$$x < 0, \quad 0 < x < 1, \quad x > 1.$$

Neigungswinkel

$$\phi_0 = \tan^{-1} f(t_0, x_0) = \tan^{-1} 4x_0(1 - x_0) \qquad \forall t_0$$

autonom $\Longrightarrow$ zeittranslationsinvariante Lösungskuven

Wie sind die Asymptoten? für $t \to -\infty$ oder $+\infty$? gibt's Explosionen?

Kapitel 9

Kontrahierende Abbildungen auf Funktionenräume

Betrachte die AWA

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \qquad xin\mathbb{R}^d, \tag{9.1}$$

wobei f mindestens stetig ist.

Eine stetig differenzierbare Funktion $x : [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ heißt Lösung der AWA, wenn $x(t_0) = x_0$ und

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), \qquad \forall\, t \in [t_0, T].$$

Integriere bzg. $s \in [t_0, t] \subset [t_0, T]$. Dann gilt

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad t \in [t_0, T]. \tag{9.2}$$

d.h. eine Lösung der AWA (9.1) genügt der Integralgleichung (9.2).

Umgekehrt: eine stetige Funktion $x : [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$, die der Integralgleichung (9.2) genügt, ist eine Lösung der AWA (9.1).

Bemerkung Wir haben nur vorausgesetzt , dass x stetig ist, obwohl eine Lösung der AWA stetig differenzierbar sein muss!

Beweis:: Die Abbildung $t \to f(t, x(t))$ ist stetig, weil die Abbildungen $t \to x(t)$ und $(t, x) \to f(t, x)$ stetig sind. Deshalb gilt der Hauptsatz der Integral/Differentialrechnung in diesem Fall und ergibt

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds = f(t, x(t))$$

$\Longrightarrow \qquad x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$ ist stetig differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt}\left\{x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds\right\} = f(t, x(t))$$

Aber $x(t)$ genügt der Integralgleichung (9.2), d.h.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

$\Longrightarrow$ $x(t)$ ist stetig differenzeirbar und

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)),$$

und auch (mit $t = t_0$) $x(t_0) = x_0$ d.h. x ist eine Lsöung der AWA. ■

Die AWA und die Integralgleichung sind äquivalent, aber die Integralgleichung ist theoretisch günstiger, weil sie nur Stetigkeit fordert, aber nicht Stetigdifferenzierbarkeit !

Sei $\mathcal{C}_0 = C([t_0, T], \mathbb{R}^d)$ der Funktionenraum stetiger Funktionen $x : [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ und definiere einen Abbildung $T : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_0$ durch $y = Tx$, wobei

$$y(t) = (Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \qquad \forall t \in [t_0, T].$$

$\Longrightarrow$ eine Lösung x der Integralgelchung (9.2) genügt der (selben')Gleichung

$$x = Tx$$

d.h. x ist ein Fixpunkt der Abbildung T auf $\mathcal{C}_0$.

Die Existenz eines Fixpunktes ergibt die Existenz einer Lösung der AWA (9.1).

Frage: *Wann existiert ein solcher Fixpunkt ?*

Dafür brauchen wir bißchen Funktionalanalysis

Der Funktionenraum $\mathcal{C}_0 = C([t_0, T], \mathbb{R}^d)$ ist ein reeller Vektorraum mit punktweise definierter Addition und Skalarmultiplikation, d.h.

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\alpha \cdot x)(t) = \alpha \cdot x(t) \qquad \forall t \in [t_0, T],$$

für alle x, $y \in \mathcal{C}_0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $x + y$, $\alpha x \in \mathcal{C}_0$.

Eine Norm ist ein Maßstab der Größe der Elemente eines Vektorraumes.

Sei $\mathcal{X}$ ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ heißt Norm auf $\mathcal{X}$, wenn

a) Definitheit $\|\ominus\| = 0$ und $\|x\| > 0$ $\forall x \neq \ominus$ ($\ominus$ = Nullvektor in $\mathcal{X}$).

b) Homogenität $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ $\forall x \in \mathcal{X}, \alpha \in \mathbb{R}$.

c) Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y, \in \mathcal{X}$.

Beispiele $\boxed{\mathcal{X} = \mathbb{R}^d}$ $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

Euklidische Norm $\|x\|_{\text{euk}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$

Maximum-Norm $|x\||_{\max} = \max_{i=1,\cdots,d} |x_i|$

Manhattan-Norm $\quad \|x\|_{\text{man}} = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$

Bemerkung Alle Norme auf $\mathbb{R}^d$ sind äquivalent, d.h. seien $\|\cdot\|_{[1]}$ und $\|\cdot\|_{[2]}$ zwei Norme auf $\mathbb{R}^d$, dann existieren Konstanten α, $\beta > 0$ mit

$$\alpha\|x\|_{[1]} \leq \|x\|_{[2]} \leq \beta\|x\|_{[1]} \qquad \forall x \in R^d$$

Insbesonders: Konvergiert eine Folge bzg. einer Norm, dann konvergiert die Folge bzg. der anderen Norm. Daher für eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^d$ haben wir

$$\boxed{x_n \to \overline{x} \iff ||x_n - \overline{x}|| \to 0}$$

Beispiele $\quad \boxed{\mathcal{X} = \mathcal{C}_0 = C\left([t_0, T], \mathbb{R}^d\right)}$

sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^d$ und $x \in \mathcal{C}_0$.

Maximum-Norm $\quad |||x|||_{\max} = \max\limits_{t\in[t_0,T]} \|x(t)\|$

Exponential-Norm (d.h. mit exponentialer Gewichtsfunktion) $\quad |||x|||_{\exp} = \max\limits_{t\in[t_0,T]} \left\{e^{-\lambda t}\|x(t)\|\right\}$

Quadratmittelnorm $\quad |||x|||_{\text{QM}} = \sqrt{\int_{t_0}^{T} \|x(t)\|^2 dt}$

Die Max- und Exp-Norm auf $\mathcal{C}_0$ sind äquivalent, weil

$$e^{-\lambda T} \cdot |||x|||_{\max} \leq |||x|||_{\exp} \leq |||x|||_{\max} \qquad \forall x \in \mathcal{C}_0$$

Aber die Max- und QM-Norm sind nicht äquivalent, weil nur gilt

$$|||x|||_{\text{QM}} \leq \sqrt{T - t_0} \cdot |||x|||_{\max} \qquad \forall x \in \mathcal{C}_0$$

$\Longrightarrow$ Konvergenz bzg. der Max-Norm ist stärker

Banach-Räume: Ein normierter Vektorraum $(\mathcal{X}, |||\cdot|||)$ heißt Banach-Raum, wenn er vollständig ist, dh wenn jede Cauchy-Folge in $\mathcal{X}$ gegen ein $x \in \mathcal{X}$ konvergiert (alles bzg. der Norm $|||\cdot|||$)

Eine Folge $\{x_n\}_{n\geq 1}$ in $\mathcal{X}$ heißt Cauchy-Folge in $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Ganzzahl N_ε, so dass

$$|||x_n - x_m||| < \varepsilon \qquad \forall\, n, m \geq N_\varepsilon$$

Beispiele

A) $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ mit beliebiger Norm ist ein Banach-Raum

B) $\left(C([t_0, T], \mathbb{R}^d), |||\cdot|||_{\max}\right)$ und $\left(C([t_0, T], \mathbb{R}^d), |||\cdot|||_{\exp}\right)$ sind Banach-Räume

$\Longrightarrow$ die Limesfunktion einer gleichmäßigen konvergierenden Folge stetiger Funktionen ist eine stetige Funktion!

C) $\Big(C([t_0, T], \mathbb{R}^d, |||\cdot|||_{\text{QM}}\Big)$ ist nicht vollständig.

Betrachte die Folge $\{\varphi_n\}$ in $C([0,2],\mathbb{R})$ definiert durch

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} t^n, & 0 \le t \le 1 \\ 1, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Cauchyfolge

$$\begin{aligned} ||\varphi_n - \varphi_m|||_{\mathrm{QM}} &= \sqrt{\frac{1}{2n+1} - \frac{2}{n+m+1} + \frac{1}{2m+1}} \\ &< \sqrt{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2m+1}} \\ &\le \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n,m \ge \frac{1}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Konvergenz!

$$||\varphi_n - \overline{\varphi}|||_{\mathrm{QM}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

wobei

$$\overline{\varphi}(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Aber $\overline{\varphi}$ ist nicht stetig ! $\Longrightarrow$ $\overline{\varphi} \notin C([0,2],\mathbb{R})$ nicht vollständig!

Satz 5 (Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen) *Sei $\mathcal{D}$ eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ und sei $T : \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ eine Kontraktion, dh es existiert eine Konstante $\theta \in [0,1)$ mit*

$$\||Tx - T\tilde{x}\|| \le \theta \||x - \tilde{x}\||, \qquad \forall x, \tilde{x} \in \mathcal{D}.$$

die $\mathcal{D}$ in sich abbildet, dh

$$T(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}.$$

Dann besitzt T einen eindeutigen Fixpunkt $\overline{x} = T\overline{x}$ in $\mathcal{D}$ und jede Folge sukzessiver Approximationen,

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0,1,2,\cdots \quad \textit{mit} \quad x_0 \in \mathcal{D} \quad \textit{beliebig}$$

konvergiert gegen $\overline{x}$.

Skizze-Beweis

1) Jede Folge sukzessiver Approximationen ist eine Cauchyfolge, weil

$$\|x_n - x_{n+k}\| \le \frac{\theta^n}{1-\theta} \|x_1 - x_0\|$$

für alle n, $k \ge 1$

Warum:

a) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \theta^n \quad \|x_1 - x_0\|, \qquad \forall n = 0$ weil

$\underline{n=1}$ $\quad \|x_2 - x_1\| = \|Tx_1 - Tx_0\| \leq \theta\,\|x_1 - x_0\|$

$\underline{n=2}$ $\quad \|x_3 - x_2\| = \|Tx_2 - Tx_1\| \leq \theta\,\||x_2 - x_1\| \leq \theta^2\,\|x_1 - x_0\|$

u.s.f. $\implies$ mit mehrfacher Benutzung der Dreiecksungleichung

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+k} - x_n\| &\leq \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \cdots + \|x_{n+2} - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| \\
\text{von } a) \implies &\leq \theta^{n+k-1}\|x_1 - x_0\| + \cdots + \theta^{n+1}\,\|x_1 - x_0\| + \theta^n\,\|x_1 - x_0\| \\
&= \theta^n \left(\theta^{k-1} + \cdots + \theta + 1\right) \|x_1 - x_0\| \\
&\leq \frac{\theta^n}{1-\theta}\,\|x_1 - x_0\| \qquad \text{weil} \quad 0 \leq \theta < 1
\end{aligned}
$$

2) Jede Folge sukzessiver Approximationen konvergiert gegen einen Fixpunkt von T, weil

Cauchy-Folge in einem Banach-Raum $\implies$ Konvergenz.

Sei $x_{n+1} = Tx_n$ und $x_n \to \overline{x}$. Dann gilt auch $x_{n+1} \to \overline{x}$!

$$
\begin{aligned}
\|\overline{x} - T\overline{x}\| &\leq \|\overline{x} - x_{n+1}\| + \|Tx_n - T\overline{x}\| \qquad \text{Dreiecksungleichung mit} \quad x_{n+1} = Tx_n \\
&\leq \|\overline{x} - x_{n+1}\| + \theta\,\|x_n - \overline{x}\| \\
&\longrightarrow 0 \qquad \text{für} \quad n \to \infty
\end{aligned}
$$

$$\implies \|\overline{x} - T\overline{x}\| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{x} = T\overline{x} \quad \underline{\text{Fixpunkt!}}$$

3) T besitzt nur <u>einen</u> Fixpunkt in D
Sei $\overline{x} = T\overline{x}$ und $\overline{y} = T\overline{y}$ zwei Fixpunkte von T in D mit $\overline{x} \neq \overline{y}$. Dann gilt

$$\|\overline{x} - \overline{y}\| = \|T\overline{x} - T\overline{y}\| \leq \theta\|\overline{x} - \overline{y}\| < \|\overline{x} - \overline{y}\|$$

<u>Widerspruch</u> $\implies \overline{x} = \overline{y}$! ■

<u>Beispiel</u> Betrachte den Banach-Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, d.h. mit dem Betrag $|\cdot|$ als die Norm, und die Abbildung $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$T_x = \frac{1}{2}x + 4$$

$\implies$ T ist Kontraktion mit Konstante $\theta = \frac{1}{2}$

$$|T_x - T\tilde{x}| = \frac{1}{2}\,|x - \tilde{x}|$$

und T bildet $\mathbb{R}$ in sich ab — <u>oder</u> besser, T bildet $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ in sich ab.

$\Longrightarrow$ es existiert ein eindeutiger Fixpunkt in $\mathbb{R}^+$

$$x^* = Tx^* = \frac{1}{2}x^* + 4 \quad \Longrightarrow \quad x^* = 8$$

und

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 4 \longrightarrow x^* = 8 \quad \text{für} \quad n \to \infty \quad \text{für alle} \quad x_0 \in \mathbb{R}^+.$$

Kapitel 10

Der EE-Satz von Picard und Lidelöf

Wir werden jetzt eine einfache Version des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes mit Hilfe des Fixpunktsatzes für kontrahierende Abbildungen beweisen.

Satz 6 (Picard-Lindelöf) *Sei $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig und genüge f einer Lipschitz-Bedingung in x auf $\mathbb{R}^d$ gleichmäßig in $t \in [t_0, T]$, dh es existiert eine Konstante $L > 0$ mit*

$$\|f(t,x) - f(t,\tilde{x}\| \ \leq \ L\|x - \tilde{x}\|$$

für alle x, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ und alle $t \in [t_0, T]$. Dann besitzt die Anfangswertaufgabe

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{10.1}$$

eine eindeutige Lösung $x^* : [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ und die Folge sukzessiver Approximationen, definiert durch

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s))\, ds, \qquad t_0 \leq t \leq T,$$

für $n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ mit $x_0(t) \equiv x_0$ konvergiert gegen x^* gleichmäßig auf $[t_0, T]$.

Beweis:: Betrachte die Exponential-Norm $\|\cdot\|_{\exp}$ auf $\mathcal{C}_0 = C([t_0, T], \mathbb{R}^d)$ mit $\lambda = 2L$, d.h.

$$\|x\|_{\exp} = \max_{t_0 \leq t \leq T} \left\{ \|x(t)\|\, e^{-2Lt} \right\}.$$

und definiere eine Abbildung $T : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_0$ durch

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\, ds, \qquad t_0 \leq t \leq T,$$

für jedes $x \in \mathcal{C}_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|(Tx)(t) - (T\tilde{x})(t)\| \quad &= \quad \left\| \int_{t_0}^t \{ f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s)) \}\, ds \right\| \\
&\leq \quad \int_{t:0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))\|\, ds \\
&\leq \quad \int_{t_0}^t \underbrace{L\|x(s) - \tilde{x}(s)\|}_{\text{Lipschitz Bedingung}}\, ds \\
&= \quad L \int_{t_0}^t \{ \|x(s) - \tilde{x}(s)\| e^{-2Ls} \}\, e^{eLs}\, ds
\end{aligned}$$

für jedes $t \in [t_0, T]$ und alle x, $\tilde{x} \in \mathcal{C}_0$.

Aber $\|x(s) - \tilde{x}(s)\|e^{-2Ls} \leq \|x - \tilde{x}\|_{\exp}$ für alle $s \in [t_0, T] \subseteq [t_0, T] \quad \Longrightarrow$

$$\|(Tx)(t) - (T\tilde{x})(t)\| \leq L\,\|x - \tilde{x}\|_{\exp} \int_{t_0}^{t} e^{2Ls}\,ds \leq \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|_{\exp}\, e^{2Lt}$$

für jedes $t \in [t_0, t]$.

$$\Longrightarrow \qquad \|(Tx)(t) - (T\tilde{x})(t)\|\, e^{-2Lt} \leq \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}|_{\exp} \qquad \forall t \in [t_0, T].$$

Diese Ungleichung ist auch gültig für das Maximum der linken Seite auf $[t_0, T]$

$$\Longrightarrow \qquad \|Tx - T\tilde{x}\|_{\exp} \leq \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|_{\exp}.$$

$\Longrightarrow$ T ist eine Kontraktion auf $\mathcal{C}_0$ bzgl. der Exponential-Norm mit $\lambda = 2L$, d.h. auf dem Banach-Raum $(\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_{\exp})$.

Die Teilmenge $\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{C}_0 \ : \ x(t_0) = x_0\}$ ist nicht leer und abgeschlossen in $(\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_{\exp}$.

Offensichtlich bildet T die Menge $\mathcal{D}$ in sich ab !

Wir können jetzt den Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen verwenden:

1) Die Abbildung T besitzt einen eindeutigen Fixpunkt $x^* = Tx^*$ in $\mathcal{D}$

2) die Folge sukzessiver Approximationen $x_{n+1} = Tx_n$ mit $x_0(t) \equiv x_0$ konvergiert gegen x^* bezgl. der Norm $\|\cdot\|_{\exp}$

$\Longrightarrow$ die Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds, \qquad t_0 \leq t \leq T,$$

besitzt eine eindeutige Lösung $x^* \in \mathcal{C}_0$, die auch die eindeutige Lösung der AWA ist.

Die Konvergenz der sukzessiven Approximationen

$$x_{n+1}t) = (Tx_n)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\,ds, \qquad t_0 \leq t \leq T, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

mit $x_0(t) \equiv x_0$ gegen die Lösung $x^*(t)$ gleichmäßig auf $[t_0, T]$ ist, weil die Exponential-Norm und die Maximum-Norm äquivalent sind und die Konvergenz bzgl. der Maximum-Norm gleichmäßige Konvergenz ist. ■

Bemerkungen 1. Die Abbildung T ist nur eine Kontraktion bzgl der Maximum-Norm auf $[t_0, T]$, wenn $T - t_0$ klein genug ist. Von dem obigen Beweis haben wir:

$$\begin{aligned}
\|(tTx)(t) - (T\tilde{x})(t)\| &\leq L \int_{t_0}^{t} \|x(s) - \tilde{x}(s)\|\, ds \quad t \in [t_0, T] \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} \|x(s) - \tilde{x}(s)\|\, ds \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} \|x - \tilde{x}\|_{\max}\, ds \\
&= L(T - t_0) \cdot \|x - \tilde{x}\|_{\max}
\end{aligned}$$

Für eine Kontraktion brauchen wir $L(T - t_0) < 1$ oder

$$T < t_0 + \frac{1}{L}.$$

Wenn diese Bedingung nicht gültig ist, dann müssen wir den Beweis sukzessiv auf den Teilintervallen $[t_0, t_0 + \Delta]$,$[t_0 + \Delta, t_0 + 2\Delta]$, $\cdots$ (mit $\Delta = \frac{1}{2L}$) wiederholen und die Teillösungen zusammenkleben.

$$\text{neue AWA} \qquad \frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0 + \Delta) = x_1^*(t_0 + \Delta),$$

wobei x_1^* die Lösung auf dem ersten Intervall $\Longrightarrow$ nicht besonders elegant !

Bemerkungen 2. Die sukzessiven Approximationen sind nur praktisch als Lösungsmethode in ganz einfachen Fällen

Beispiel $\boxed{\frac{dx}{dt} = x \text{ mit } x(0) = 1} \Longrightarrow x_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t x_n(s)\, ds$

$n = 0$ $\quad x_0(t) \equiv 1 \Longrightarrow x_1(t) = 1 + \int_0^t 1 ds = 1 + t$

$n = 1$ $\quad x_1(t) = 1 + t \Longrightarrow x_1(t) = 1 + \int_0^t (1 + s)\, ds = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$

wiederhole mit mathematischer Induktion $\Longrightarrow$

$$x_n(t) = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots, + \frac{1}{n!}t^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}t^j \to \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}t^j = e^t = x^*(t) \quad \text{Lösung der AWA}$$

Konvergenz hier ist gleichmäßig auf $[0, T]$ für jedes $T > 0$, aber nicht gleichmäßig auf $[0, \infty)$.

10.0.3 Lipschitz-Funktionen

Eine Funktion $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ genügt einer Lipschitz-Bedingung auf $\mathbb{R}^d$ mit Lipschitz-Konstante $L > 0$, wenn gilt

$$\|g(x) - g(\tilde{x}\| \leq L\|x - \tilde{x}\| \qquad \text{für alle} \quad x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Ene solche Funktion heißt Lipschitz-Funktion

1) Eine Lipschitz-Funktion mit Lipschitz-Konstanten $L < 1$ ist eine Kontraktion

2) Eine Lipschitz-Funktion auf $\mathbb{R}^d$ ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^d$:

$$\|g(x) - g(\tilde{x})\| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad \|x - \tilde{x}\| < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}.$$

3) Eine stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit gleichmäßig beschränkten partiellen Ableitungen auf $\mathbb{R}^d$ ist eine Lipschitz-Funktion auf $\mathbb{R}^d$.

Sei $\left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right| \leq L < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $i, j = 1, \cdots, d$. Der Mittelwertsatz für Ableitungen behauptet, dass

$$g(x) - g(\tilde{x}) = \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x^*)\right] (x - \tilde{x}),$$

wobei x^* ein Punkt auf der Geraden zwischen x und $\tilde{x}$ ist und $[\frac{\partial g}{\partial x}]$ die Matrix partieller Ableitungen von g ist, d.h. mit (i, j)tem Komponent $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}$.

$$\Longrightarrow \qquad \|g(x) - g(\tilde{x}\| \leq L\|x - \tilde{x}\| \quad \text{für alle } x,\, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d$$

4) Es gibt Lipschitz-Funktionen, die nicht stetig differenzierbar sind

Beispiel $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$, der Betrag von $x \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| = |\,|x| - |y|\,| \leq 1 \cdot |x - y|$ von den Dreiecksungleichungen

d.h. Lipschitz-Funktion mit Lipschitz-Konstante $L = 1$.

Aber $f(x) = |x < |$ ist nicht differenzierbar für $x = 0$.

10.0.4 Der Picard-Lindelöf-Satz gilt für lineare DGLen

Betrachte lineare vektorwertige DGL

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t)$$

d.h. mit der Vectorfeldfunktion $f(t, x) = A(t)x + g(t)$, wobei $t \to A(t)$ eine stetige $d \times d$-matrixwertige Funktion ist und $t \to g(t)$ eine stetige d-dimensionale Funktion ist.

Die Ableitungen $\quad [\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)] \equiv A(t)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und t im Definitionsbereich von $A(t)$.

$$\Longrightarrow \qquad \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)\right| \leq \max_{t_0 \leq t \leq T} |a_{i,j}(t)| \leq L < \infty$$

für alle $i, j = 1, \cdots, d$.

d.h. eine AWA für die obige lineare, vektorwertige DGL besitzt eine eindeutige Lösung auf jedem Intervall, wo die Koeffizientenfunktionen $t \to A(t)$ und $t \to g(t)$ stetig sind.

Leider sind nicht alle DGLen dieser linearen Form. Im Allgemeinen sind die Ableitungen der Vektorfeldfunktion einer nichtlinearen DGL nicht gleichmäßig beschränkt auf $\mathbb{R}^d$.

Beispiel $f(x) = x(1-x)$ mit Ableitung $f'(x) = 1 - 2x$

Was ist zu tun ?

Kapitel 11

Der allgemeine EE-Satz

In dem allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz-Satz setzen wir voraus, dass die Vektorfeldfunktion f stetig differenzierbar ist. Eine solche Funktion genügt einer lokalen Lipschitz-Bedingung (siehe unten), aber nicht immer einer globalen Lipschitz-Bedingung wie in dem Picard-Lindelöf-Satz. Deshalb müssen wir den Beweis des Picard-Lindelöf-Satzes verändern. Besonders müssen wir das Existenzintervall der Lösung eventuell verkleinern.

Wir werden alles hier für den skalaren Fall beschreiben — der vektorwertige Fall ist ähnlich, braucht aber komponentenweise Abschätzungen u.s.w.und ist nicht so sauber!

Betrachte jetzt die skalare AWA

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

mit $(t_0, x_0) \in (\gamma, \delta) \times (\alpha, \beta)$, wobei

$$-\infty \leq \gamma < \delta \leq +\infty, \qquad -\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$$

und $f : (\gamma, \delta) \times (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist.

$$\Longrightarrow \qquad |f(t,x) - f(t,\tilde{x})| \leq L_0 |x - \tilde{x}|$$

für alle $x, \tilde{x} \in [x_0 - k, x_0 + k]$ und $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$. d.h. f genügt einer lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. x gleichmäßig in t auf dem Rechteck

$$R_0 = [t_0 - h, t_0 + h] \times [x_0 - k, x_0 + k]$$

mit lokaler Lipschitz-Konstanten L_0.

Frage: *Können wir jetzt den Beweis des Picard-Lindelöf-Satzes durchführen ?*

d.h. mit dem Funktionenraum $\mathcal{C}_0 = C([t_0 - h, t_0 + h], [x_0 - k, x_0 + k])$ und der Teilmenge $\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{C}_0 \ : \ x(t_0) = x_0\}$

NEIN ! noch nicht: die Abbildung T definiert durch

$$(Tx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

erzeugt eine stetige Funktion $t \mapsto (Tx)(t)$ mit $(Tx)(t_0) = x_0$ aber es ist nicht ganz sicher, dass $(Tx)(t)$ in dem Intervall $[x_0 - k, x_0 + k]$ bleibt für alle $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$!

Beispiel $\quad \dfrac{dx}{dt} = x^2$ mit $x(t_0) = x_0 > 0$

Wähle Konstanten h und k mit

$$0 < h < \min\{t_0 - \gamma, \delta - t_0\}, \qquad 0 < k < \min\{x_0 - \alpha, \beta - x_0\}$$

Dann ist das Rechteck

$$R_0 = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \le h,\ |x - x_0| \le k\}$$

eine beschränkte. abgeschlossene ($\equiv$ kompakte !) Teilmenge des Definitionsbereiches $(\gamma, \delta) \times (\alpha, \beta)$.

BILD

Die Funktionen $f(t,x)$ und $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ sind stetig auf der kompakten Menge R_0.

$$\Longrightarrow \qquad \max_{(t,x)\in R_0} |f(t,x)| = M_0 < \infty \qquad \text{und} \qquad \max_{(t,x)\in R_0} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right| = L_0 < \infty$$

Von dem Mittelwertsatz für Ableitungen:

$$|f(t,x) - f(t,\tilde{x})| = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t,\theta) \right| \cdot |x - \tilde{x}|$$

wo θ auf der Gerade zwischen x und $\tilde{x}$ liegt.

Die explizite Lösung lautet

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \to +\infty \qquad \text{für} \qquad t \to \frac{1}{x_0}-$$

Es ist klar, dass eine Lösungskurve einen positiven Zeitverlauf braucht, um den Rand des Rechtecks R_0 von (t_0, x_0) zu erreichen.Daher sollen wir ein kleineres h benutzen. *Wie klein ?*

Hilfssatz $\qquad |Tx)(t) - x_0| \le M_0 \cdot |t - t_0|$

Beweis:: Es gilt

$$(Tx(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

und daher folgt

$$|(Tx)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|\, ds \right|$$
$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} M_0\, ds \right| \leq M_0 \cdot |t - t_0| \qquad \text{hier}$$

weil $x \in \mathcal{C}_0 := C\left([t_0 - h, h + L], [x_0 - k, x_0 + k]\right) \implies |f(s, x(s))| \leq M_0!$

<u>d.h.</u> $(t, (Tx)(t))$ liegt in dem <u>Kegel</u>

$$|y - x_0| \leq M_0\, |t - h|.$$

Es gibt 2 <u>Möglichkeiten</u>

1) Der Kegel bleibt in dem Rechteck R_0 für alle t mit $|t - t_0| \leq h$

   BILD

   In diesem Fall definieren wir $\boxed{\delta(t_0, x_0) = h}$

2) Der Kegel schneidet die oberen und unteren Ränder des Rechtecks für $t = t^*$ mit $|t^* - t_0| < h$

   BILD

   Hier gilt $M_0 \cdot |t^* - t_0| = k \implies |t^* - t_0| = \dfrac{k}{M_0}$ und wir definieren $\boxed{\delta(t_0, x_0) = \dfrac{k}{M_0}}$

$$\implies \text{für die beiden Fälle:} \quad \boxed{\delta(t_0, x_0) = \min\left\{h, \frac{k}{M_0}\right\}}$$

Betrachte jetzt den Funktionenraum

$$\mathcal{C}_0 = C\left([t_0 - \delta(t_0, x_0), t - 0 + \delta(t_0, x_0)], [x_0 - k, x_0 + k]\right)$$

mit der <u>Exponential-Norm</u>

$$\|x\|_{\exp} = \max_{|t - t_0| \leq \delta(t_0, x_0)} \left\{ |x(t)| \cdot e^{-2L_0 \cdot |t - t_0|} \right\}$$

wobei L_0 die lokale Lipschitz-Konstante ist. $\Longrightarrow$ $\big(\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_{\exp}\big)$ ist ein Banach-Raum.

Betrachte auch die Teilmenge $\mathcal{D}_0 = \{x \in \mathcal{C}_0 : x(t_0) = x_0\}$, die nichtleer und abgeschlossen ist.

$\Longrightarrow$ T bildet $\mathcal{D}_0$ in sich ab — eine Folge der Konstruktion — und T ist eine Kontraktion wegen der Wahl von $\delta(t_0, x_0)$.

Jetz geht alles wie im Beweis der Picard-Lindelöf-Satzes.

d.h. T besitzt einen eindeutigen Fixpunkt $x^* = Tx^* \in \mathcal{D}_0$

$\Longrightarrow$ die Funktion $x^* : [t_0 - \delta_0(t_0, x_0), t_0 + \delta(t_0, x_0)] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die eindeutige Lösung der AWA.

Kapitel 12

Fortsetzung von Lösungen

Sei $f : (\gamma, \delta) \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar, wobei $-\infty \le \gamma < \delta \le +\infty$ und $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ offen ist.

$\Longrightarrow$ die Anfangswertaufgabe

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = f(t,x) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

besitzt eine eine eindeutige Lösung, die (mindestens, eventuell nur) lokal definiert ist:
dh $\quad x_0^* : [t_0 - \delta(t_0, x_0), t_0 + \delta(t_0, x_0)] \longrightarrow \mathcal{U}$
wobei

$$[t_0 - \delta(t_0, x_0), t_0 + \delta(t_0, x_0)] \subset (\gamma, \delta).$$

In dem Beweis haben wir $\delta(t_0, x_0) > 0$ klein genug gewählt, so dass die Lösungskurve $(t, x_0^*(t))$ in dem Durchschnitt eines Kegels K_0 und abgeschlossenen Rechtecks R_0 bleibt.

BILD

Definiere

$$t_1 := t_0 + \delta(t_0, x_0), \qquad x_1 := x_0^*(t_1) = x_0^*(t_0 + \delta(t_0, x_0))$$

Offensichtlich gilt: $(t_1, x_1) \in (\gamma, \delta) \times \mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad$ die neue AWA

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_1) = x_1,$$

besitzt lokal eine eindeutige Lösung

$$x_1^* : [t_1 - \delta(t_1, x_1), t_1 + \delta(t_1, x_0)] \longrightarrow \mathcal{U}$$

für ein geeignetes $\delta(t_1, x_1) > 0$, d.h. so, dass die Lösungskurve $(t, x^*(t))$ in dem Durchschnitt eines Kegels K_1 und Rechtecks R_1 bleibt.

BILD

Wegen der Eindeutigkeit der AWA-Lösungen haben wir

$$x_0^*(t) \equiv x_1^*(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta(t_0, x_0)] \bigcup [t_1 - \delta(t_1, x_1), t_1 \delta(t_1, x_1)] .$$

Definiere

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} x_0^x(t), & t \in \left[t_0 - \delta(t_0, x_0), \underbrace{t_0 + \delta(t_0, x_0)}_{t_1} \right] \\ x_1^*(t), & t \in [t_1, t_1 + \delta(t_1, x_1)] \end{cases}$$

Offensichtlich genügt $\overline{x}$ der Integralgleichung

$$\overline{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \overline{x}(s))\, ds \equiv x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, \overline{x}(s))\, ds$$

für alle $t \in [t_0 - \delta(t_0, x_0), t_1 + \delta(t_1, x_1)]$ und ist stetig $\Longrightarrow$ $\overline{x}$ ist Lösung der ursprünglichen AWA sowie der neuen AWA auf dem Intervall $[t_0 - \delta(t_0, x_0), t_1 + \delta(t_1, x_1)]$.

Die Funktion x_1^* heißt Fortsetzung der Lösung x_0^*:

Wir können alles wiederholen, d.h. mit $t_2 = t_1 + \delta(t_1, x_1)$ und $x_2 = x_1^*(t_2)$, usw

$\Longrightarrow$ wir erhalten eine Lösung $x^*(t)$ für

$$t_0 \leq t \leq t_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \delta(t_j, x_j)$$

(und ähnlicherweise für $t < t_0$).

Frage: *Ist $t_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \delta(t_j, x_j)$ endlich oder unendlich ?*

Satz 7 *Sei $f : (\gamma, \delta) \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar, wobei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$ offen ist. Für $(t_0, x_0) \in (\gamma, \delta) \times \mathcal{U}$ betrachte die AWA*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0.$$

1) Sind x_1 und x_2 Lösungen dieser AWA im Intervall $I \subset (\gamma, \delta)$ mit $t_0 \in I$, so gilt

$$x_1(t) \equiv x_2(t), \quad t \in I.$$

2) Es gibt ein offenes Intervall $I^* \subset (\gamma, \delta)$ und eine Lösung x^* der AWA in I^*; so dass für jede Lösung $x : I \longrightarrow \mathcal{U}$ (mit $t_0 \in I \subset (\gamma, \delta)$) der AWA gilt

$$I \subset I^*, \qquad x\big|_I = x^*$$

Beweis:: Sei $I = [a, b]$ (andere Fälle behandelt man analog) und definiere

$$t^* := \sup \{ t \in [t_0, b] \ : \ x_1(s) = x_2(s), \quad t_0 \leq s \leq t \}$$

Annahme: $t^* < b$

Da x_1 und x_2 stetig sind, gilt
$$x_1(t^*) = x_2(t^*) =: x^*.$$
Betrachte die neue AWA
$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t^x) = x^*.$$
Diese AWA ist <u>eindeutig lösbar</u> auf einem Intervall $[t^*, t_1]$ mit $t_1 > t^*$.
Also muss $x_1(t) = x_2(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ gelten.

Dies ist im Widerspruch zur Definition von t^*

Definiere
$$I^* = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I,$$
wobei
$$\mathcal{F} := \{I \ : \ I \text{ ist Intervall}, \ t_0 \in I, \exists \text{Lösung der ursprünglichen AWA } x_I : I \longrightarrow \mathcal{U}\}.$$

<u>Dann</u>

i) I^* ist offensichtlich wieder ein Intervall mit $t_0 \in I^*$.

ii) Wegen des EE-Satzes muss I^* <u>offen</u> sein, denn in einem Randpunkt von I^*, der zu I^* gehört, kann man Lösungen fortsetzen.

(iii) Definiere: $x_1^* : I^* \longrightarrow \mathcal{U}$ durch
$$x^*(t) := x_I(t), \qquad \text{falls} \quad t \in I \quad \text{mit} \quad I \in \mathcal{F}.$$
Diese Definition ist sinnvoll wegen der Eindeutigkeit von Lösungen. Offensichtlich für jedes $t \in I$ genügt x^* der IG
$$x^*(t) = x_0 + \int_{t_o}^t f(s, x^*(s))\, ds$$
$\Longrightarrow \quad x^*$ ist Lösung der AWA und nach Konstruktion ist das Intervall I^* maximal.

Das Intervall I^* heißt <u>maximales Existenzintervall.</u> Es kann die Form
$$(-\infty b), \quad (a,b), \quad (a,+\infty), \quad (-\infty,\infty)$$
haben.

<u>Beispiele</u>

1) $\dfrac{dx}{dt} = 1 + x^2, \quad x(0) = 0 \quad \Longrightarrow$ <u>Lösung</u> $x(t) = \tan t$ mit <u>maximales Existenzintervall</u> $I^* = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

2) $\dfrac{dx}{dt} = x^2, \quad x(0) = 1 \quad \Longrightarrow$ <u>Lösung</u> $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$ mit <u>maximales Existenzintervall</u> $I^* = (-\infty, 1)$.

3) $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 1, \quad x(0) = 0 \quad \Longrightarrow$ Lösung $x(t) = \tanh t$ mit maximales Existenzintervall $I^* = (-\infty, \infty)$.

Nicht alle Lösungen explodieren in der Nähe eines endlichen Randpunktes von I^*.

Beispiel $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{x}, \quad x(0) = 1,$ d.h. mit Definitionsbereiche $(-\infty, \infty) \times \mathcal{U}$, wobei $\mathcal{U} := \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 0\}$.

$\Longrightarrow$ Lösung $x(t) = \sqrt{2t+1}$ mit $I^* = \left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$

Die Lösung hört auf zu existieren für $t \longrightarrow -\frac{1}{2}+$. Es gibt keine Explosion hier!

Diese Beispiele sind typisch: es gibt nur die folgenden Möglichkeiten.

1) Die Lösung existiert für alle $t > t_0$.

2) Es gibt $b > t_0$ mit $\lim_{t \uparrow b} \|x(t)\| = \infty$ d.h. eine Explosion

3) Es gibt $b > t_0$ mit $\lim_{t \uparrow b} dist((t, x(t))), \partial D) = 0$. Hier ist ∂D der Rand des Definitionsbereiches $D = (\gamma, \delta) \times \mathcal{U}$ und dist ist die Abstandsfunktion, d.h.

$$\operatorname{dist}(z, \partial D) := \inf \{\|w - z\| \ \ w \in \partial D\}.$$

Der nächste Satz zeigt, dass diese die einzigen Möglichkeiten sind.

Satz 8 *Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar, wobei $D \subset \mathbb{R}^d$ offen ist, und sei x Lösung der AWA*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad (t_0, x_0) \in D$$

im maximalen Existenzintervall I^*.

Dann gilt: Keine kompakte Teilmenge von D enthält den Graphen $\{(t, x(t)) : t \in I^*\}$ von x.

Beweis:: Sei $I^* = (a, b)$.

Annahme: $K \subset D$ ist kompakt mit

$$\{(t, x(t)) : t \in I^*\} \subset K.$$

Da K beschränkt ist, gilt $-\infty < a < b < +\infty$.

Da f stetig ist, existiert

$$M := \max_{(t,x) \in K} |f(t, x)| < \infty$$

und für beliebige $t, \tau \in [t_0, b)$ gilt:

$$|x(t) - x(\tau)| = \left| \int_\tau^t f(s, x(s))\, ds \right| \leq M\, |t - \tau|.$$

$\Longrightarrow$ Es existiert $x_b = \lim_{t \uparrow b} x(t)$, denn:

Ist $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[t_0, b)$ mit

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} t_n = b,$$

so ist $\{x(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine <u>Cauchyfolge</u>:

$$|x(t_n) - x(t_m)| \leq M|t_n - t_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq M_\varepsilon.$$

$\Longrightarrow \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} x(t_n)$ existiert.

Sei $x_b := \lim_{n \longrightarrow \infty} x(t_n)$.

Ist $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Folge mit $\lim_{n \longrightarrow \infty} s_n = b$, dann gilt auch ${}_{n \longrightarrow \infty} \lim_{n \longrightarrow \infty} x(s_n) = x_b$,

<u>d.h.</u> mit dem selben Limes, weil

$$|x(t_n) - x(s_n)| \leq M|t_n - s_n| \longrightarrow 0 \qquad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Setze die Lösung $\tilde{x}$ in folgender Weise fort :

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [t_0, b) \\ x_b, & t = b \end{cases}$$

Dann gilt

$$\tilde{x}(t) = x_b + \int_b^t f(s, \tilde{x}(s))\, ds \qquad \forall t \in [t_0, b].$$

Da K abgeschlossen ist, ist $(b, x_b) \in K$, also $(b, x_b) \in D$. Dann besitzt die AWA

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(b) = x_b$$

eine Lösung in einem Intervall $[b, b + \alpha]$ mit $\alpha > 0$.

Ein Widerspruch zur Definition von b !

Kapitel 13

Lineare vektorwertige Differentialgleichungen

Wir betrachten ein System von d linearen DGen erster Ordnung

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{1,1}(t)\cdot x_1 + a_{1,2}(t)\cdot x_2 + \cdots + a_{1,d}(t)\cdot x_d + h_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{2,1}(t)\cdot x_1 + a_{2,2}(t)\cdot x_2 + \cdots + a_{2,d}(t)\cdot x_d + h_2(t) \\
\vdots \qquad & \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\frac{dx_d}{dt} &= a_{d,1}(t)\cdot x_1 + a_{d,2}(t)\cdot x_2 + \cdots + a_{d,d}(t)\cdot x_d + h_d(t)
\end{aligned}$$

oder, äquivalent, die lineare d-dimensionale DGL

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t)}$$

wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$, $\quad h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_d(t) \end{pmatrix}$, $\quad A(t) = [a_{i,j}(t)] \qquad (d \times d-$ Matrix)

Voraussetzung: die skalaren Koeffizientenfunktionen $t \to h_i(t)$, $t \to a_{i,j}t)$, $i,j = 1,\cdots,d$, (oder äquivalent, die vektor/matrixwertigen Koeffizientenfunktionen $t \to h(t)$, $t \to A(t)$) sind stetig in einem Intervall (γ,δ) mit $-\infty \le \gamma < \delta \le +\infty$.

Der Picard-Lindelöf-Satz $\Longrightarrow$ Existenz und Eindeutigkeit der Lösung jeder AWA

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad \Big(t_0 \in (\gamma,\delta), \quad x_0 \in \mathbb{R}^d \quad \text{beliebig}\Big)$$

in jedem Intervall $[a,b] \subset (\gamma,\delta)$ mit $t_0 \in (a,b)$ $\Longrightarrow$ dann durch Fortsetzung zu dem ganzen Intervall (γ,δ).

Warum? $\qquad f(t,x) = A(t)x + h(t)$ und $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) \equiv A(t)$ sind stetig in $(t,x) \in (\gamma,\delta) \times \mathbb{R}^d$

$\Longrightarrow$ f genügt einer Lipschitz -Bedeutung in $x \in \mathbb{R}^d$ gleichmäßig in $t \in [a,b]$ mit der Lipschitz Konstanten

$$L = \sup_{(t,x)\in[a,b]\times\mathbb{R}^d} \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \right\| = \max_{t\in[a,b]} \|A(t)\| < \infty.$$

Die obige DGL heißt homogen, wenn $h(t) \equiv 0$, d.h.

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

sonst inhomogen.

Wir können die allgemeine inhomogene Lösung finden mit Hilfe von Sonderlösungen der homogenen DGL. Wir haben dies schon in dem skalaren Fall ($d = 1$) gesehen.

Der folgende Beweis läßt sich ohne Schwierigkeiten in den allgemeinen Fall mit $d > 1$ umschreiben. Betrachte die AWA

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x, \qquad x(t_0) = x_0$$

für die 1-dimensionale homogene DGL. Die eindeutige Lösung lautet

$$\boxed{x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}\,x_0 = E(t,t_0)\,x_0}$$

mit

$$\boxed{E(t,t_0) = e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}} \qquad \text{Inverse des integrierenden Faktors!}$$

$E(t,t_0)$ besitzt die folgenden Eigenschaften

1) $\boxed{E(t,t_0)^{-1} = E(t_0,t)}$

Beweis $\quad E(t,t_0)^{-1} = \left(e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}\right)^{-1} = e^{-\int_{t_0}^t a(s)\,ds} = e^{\int_t^{t_0} a(s)ds} = E(t,t_0)$

2) $\boxed{E(t_0,t_0) = 1}$

3) $E(t,t_0)$ ist Lösung der AWA

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x, \qquad x(t_0) = 1,$$

und heißt fundamentale Lösung

Die allgemeine homogene Lösung lautet

$$\boxed{x(t) = E(t,t_0)\,c} \qquad \text{mit beliebiger Konstante } c \in \mathbb{R}.$$

<u>z.B.</u> die Lösung mit Anfangswert $x(t_0) = x_0$ genügt

$$x_0 = x(\tau_0) = E(\tau_0, t_0)c \quad \Longrightarrow \quad c = E(\tau_0, t_0)^{-1}x_0 = E(t_0, \tau_0)x_0$$

$\Longrightarrow$ <u>Lösung</u> $x(t) = \underbrace{E(t, t_0)E(t_0, \tau_0)}_{=E(t,\tau_0)} x_0 = E(t, \tau_0)x_0.$

Betrachte jetzt die AWA

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + h(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

für die <u>inhomogene DG</u>.

Wie in der Methode <u>Variation der Konstanten</u> versuchen wir eine Lösung der Form

$$x(t) = E(t, t_0)z(t)$$

zu finden, wobei $z(t)$ eine unbekannte Funktion ist (d.h. statt der Konstanten c der homogenen Lösung).

$\Longrightarrow$ Durch die Produktregel erhalten wir

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\{E(t, t_0)\, z(t)\} = E(t, t_0)\,\frac{dz}{dt} + \frac{dE(t, t_0)}{dt}\, z(t).$$

Aber x soll Lösung der inhomogenen DG sein, d.h.

$$a(t)\,\underbrace{E(t, t_0)z(t)}_{=x(t)} + h(t) \equiv E(t, t_0)\frac{dz}{dt} + \frac{dEt, t_0)}{dt}\, z(t).$$

Von 3) oben gilt $\dfrac{d}{dt}E(t, t_0) = a(t)\, E(t, t_0)$, <u>d.h</u> homogene Lösung.

$$\Longrightarrow \qquad a(t)E(t, t_0)\, z(t) \equiv \frac{dE(t, t_0)}{dt}\, z(t)$$

Nach Subtraktion dieser Terme erhalten wir

$$E(t, t_0)\frac{dz}{dt} = h(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dt} = E(t, t_0)^{-1}h(t) = \underbrace{E(t_0, t)h(t)}_{\text{bekannte Funktion !}}$$

Integriere:

$$\boxed{z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} E(t_0, s)h(s)\, ds}$$

<u>Aber</u>

$$x_0 = x(t_0) = E(t_0, t_0) \cdot z(t_0) = 1 \cdot z(t_0) = z(t_0) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{z(t_0) = x_0}$$

Die inhomogene AWA besitzt die <u>explizite</u> Lösung

$$\boxed{x(t) = E(t, t_0)\left\{x_0 + \int_{t_0}^{t} E(t_0, s)h(s)\, ds\right\}}$$

Wir müsen nur die <u>fundamentale Lösung</u> $E(t, t_0)$ finden.

13.1 Vektorwertiger Fall

Betrachte jetzt die d-dimensionale homogene DGL

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x.$$

Sei $e_j(t, t_0)$ die eindeutige Lösung dieser DGL mit dem Anfangswert

$$x(t_0) = e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{j-ter Komponent} \qquad \text{j-ter Einheitsvektor in } \mathbb{R}^d.$$

d.h $\boxed{e_j(t_0, t_0) = e_j}$ für $j = 1, \cdots, d$.

Definiere die $d \times d$- Matrix

$$\boxed{E(t, t_0) = [e_1(t, t_0)|\ e_2(t, t_0)|\ \cdots |\ e_d(t, t_0)]} \qquad \text{d.h. mit } e_j(t, t_0) \text{ als die j-te Spalte}$$

$E(t, t_0)$ heißt fundamentale Matrix der homogenen DGL (zu der Anfangszeit t_0) undbesitzt die folgenden Eigenschaften

1) $\boxed{E(t_0, t_0) = I}$ $d \times d-$Einheitsmatrix

$$\text{Beweis} \quad \Longrightarrow \quad E(t_0, t_0) = [e_1(t_0, t_0)|\ e_2(t_0, t_0)|\ \cdots |\ e_d(t_0, t_0)] = [e_1|\ e_2|\ \cdots |\ e_d] = I$$

2) $E(t, t_0)$ ist eindeutigeLösung der matrixwertigen AWA

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \qquad X(t_0) = I,$$

d.h. wobei $X(t) = [x_{i,j}(t)]$ eine $d \times d-$ Matrix ist — wir verstehen diese matrixwertige DGL spaltenweise als d verktorwertige DG

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x_j, \qquad x_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ x_{2,j} \\ \vdots \\ x_{d,j} \end{pmatrix} \qquad (j = 1, 2, \ldots, d$$

3) Die Lösung der homogenen AWA

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad x(t_0) = x_0$$

lautet $\boxed{x(t) = E(t,t_0)x_0}$.

<u>Beweis:</u> $x(t_0) = E(t_0,t_0)x_0 = Ix_0 = x_0$ und (spaltenweise)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[E(t,t_0)x_0\right] = \left[\frac{dE}{dt}\right]x_0 = \left[A(t)E(t,t_0)\right]x_0 = A(t)\left[E(t,t_0)x_0\right] = A(t)x(t)$$

(Vorsicht mit der Reihenfolge dieser Matrixoperationen hier!)

4) **Satz 9** *Für alle* t, t_0, $t_1 \in (\gamma,\delta)$ *gilt:*

1) $E(t,t_1) = E(t,t_0)E(t_0,t_1)$

2) $E(t,t_0)$ *ist <u>invertierbar</u> mit* $E(t,t_0)^{-1} = E(t_0,t)$

<u>Beweis:</u> 1) die $d \times d-$ Matrixfunktion

$$X(t) = E(t,t_0)E(t_0,t_1)$$

ist die eindeutige Lösung der matrixwertigen AWA

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \qquad X(t_0) = E(t_0,t_1).$$

Aber $\tilde{x}(t) = E(t,t_1)$ ist auch einen Lösung dieser AWA. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung muss gelten:

$$E(t,t_1) = E(t,t_0)E(t_0,t_1)$$

2) Setze $t_1 = t$ in 1), <u>d.h.</u>

$$E(t,t_0)\,E(t_0,t) = E(t,t) = I \qquad \Longrightarrow \qquad E(t,t_0)\,E(t_0,t) = I.$$

$\Longrightarrow$ $E(t,t_0)$ ist <u>invertierbar mit</u> Inverse $E(t_0,t)$. ■

Jetzt betrachte die inhomogene AWA

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t), \qquad x(t_0) = x_0$$

und versuche eine Lösung der Form

$$x(t) = E(t,t_0)z(t) \qquad \text{Varation der Konstanten!}$$

zu finden. Hier ist $z = z(t)$ eine <u>unbekannte</u> $d-$dimensionale verktorwertige Funktion. Wie in dem skalaren Fall:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[E(t,t_0)\,z(t)\right] \\
&= E(t,t_0)\frac{dz}{dt} + \frac{dE}{dt}z(t) \\
&= E(t,t_0)\frac{dz}{dt} + \underbrace{[A(t)E(t,t_0)]}_{E \text{ ist homogene Lösung}} z(t) \\
&= E(t,t_0)\frac{dz}{dt} + A(t)\underbrace{[E(t,t_0)z(t)]}_{=x(t)} z(t) \\
&= h(t) + A(t)x(t) (x \text{ ist inhomogene Lösung})
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad E(t,t_0)\frac{dz}{dt} = h(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dt} = E(t,t_0)^{-1}h(t) = E(t_0,t)h(t)$$

Integriere:

$$\boxed{z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} E(t_0,s)h(s)\,ds}$$

mit

$$\underbrace{x_0 = x(t_0)}_{\text{Anfangswert}} = E(t_0,t_0)z(t_0) = Iz(t_0) = z(t_0) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{z(t_0) = x_0}$$

Die inhomogene AWA besitzt die <u>explizite Lösung</u>

$$\boxed{x(t) = E(t,t_0)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} E(t_0,s)h(s)\,ds\right)} \qquad t,\ t_0 \in (\gamma,\delta).$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow x(t) &= E(t,t_0)x_0 + E(t,t_0)\int_{t_0}^{t} E(t_0,s)h(s)\,ds \\
&= E(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} E(t,t_0)E(t_0,s)h(s)\,ds
\end{aligned}$$

weil $E(t,t_0)$ konstant bzgl. der Integration hier ist. $\Longrightarrow$

$$\boxed{x(t) = E(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} E(t,s)h(s)\,ds}$$

weil $E(t, t_0)E(t_0, s) = E(t, s)$ — siehe den obigen Satz!

Die obige Herleitung war genau wie in dem skalaren Fall. Aber für Matrizen und Vektoren ist die Reihenfolge der Operationen sehr kritisch. Vorsicht!

Frage: *Wie finden wir die Fundamentalmatrix* $E(t, t_0)$?.

Kapitel 14

Fundamentale Matrizen

Die eindeutige Lösung der d-dimensionalen AWA

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

lautet

$$\boxed{x(t) = E(t,t_0)x + \int_{t_0}^{t} E(t,s)h(s)\,ds}$$

wobei $E(t,t_0)$ uns $E(t,s)$ fundamentale Matrizen sind, d.h.

$$E(t,t_0) = \left[e_1(t,t_0)|\ \cdots|\ e_d(t,t_0)\right], \qquad \text{(Spaltenvektoren)}$$

mit $e_j(t,t_0)$ Lösung der homogenen AWA

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad x(t_0) = e_j \quad j\text{-ter Einheitsvektor} \qquad (j = 1, \cdots, d)$$

Leider können wir diese „Einheitslösungen" nicht immer finden, aber oft können wir Lösungen anderer homogener AWAen finden.

Seien $u_1(t)$, $\cdots$, $u_d(t)$ d beliebige Lösungen der homogenen DGL

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

für welche die „Anfangswerte" $u_1(t_0)$, $\ldots$, $u_d(t_0)$ linear unabhängige Vektoren sind.

Definiere die $d \times d$-Matrix

$$U(t) = \left[u_1(t)|\ \cdots|\ u_d(t)\right].$$

Dann ist $U(t_0) = [u_1(t_0)|\ \cdots|\ u_d(t_0)]$ invertierbar!.

Von der obigen Lösungsformel (mit $h(t) \equiv 0$) sehen wir, dass

$$u_j(t) = E(t,t_0)u_j(t_0), \qquad j = 1, \ldots, d.$$

$$\Longrightarrow \quad U(t) = [e(t,t_0)u_1(t_0)|\ \cdots|\ E(t,t_0)u_d(t_0)] = E(t,t_0)\,[u_1(t_0)|\ \cdot|\ u_d(t_0)] = E(t,t_0)U(t_0).$$

Aber $U(t_0)$ ist invertierbar $\quad\Longrightarrow\quad$ $\boxed{E(t,t_0) = U(t)\ U(t_0)^{-1}}$.

Bemerkung $U(t)$ ist invertierbar für alle t, weil $E(t,t_0)$ und $U(t_0)$ invertierbar sind

$\Longrightarrow$ die d Vektoren $u_1(t), \cdots, u_d(t)$ sind linear unabhängig für jedes t.

(Wir sagen, dass die d Lösungen $u_1(t), \cdots, u_d(t)$ „linear unabhängig" sind.)

Wir haben auch

$$E(t,s) = U(t)U(s)^{-1},$$

d.h., alles was wir brauchen für die obige Lösungsformel.

Beispiel: Zwei Lösungen der homogenen DGL

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x$$

sind

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \qquad u_2(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ 4e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Der Beweis für u_1) (ähnlich für u_2)) lautet

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} u_1(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \\ &= 3e^{3t} \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} e^{3t} \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \frac{du_1}{dt} \end{aligned}$$

Die Lösungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$ sind linear unabhängig, weil für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det\,[u_1(t)|\; u_2(t)] = \det \begin{bmatrix} e^{3t} & -e^{-2t} \\ e^{3t} & 4e^{-2t} \end{bmatrix} = 5e^t \neq 0.$$

Definiere

$$U(t) = [u_1(t)|\; u_2(t)] = \begin{bmatrix} e^{3t} & -e^{-2t} \\ e^{3t} & 4e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Die fundamentale Matrix

$$\begin{aligned} E(t,t_0) = U(t)U(t_0)^{-1} &= \begin{bmatrix} e^{3t} & -e^{-2t} \\ e^{3t} & 4e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5}e^{-3t_0} & \frac{1}{5}e^{-3t_0} \\ -\frac{1}{5}e^{2t_0} & \frac{1}{5}e^{2t-0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{5}e^{3(t-t_0)} + \frac{1}{5}e^{-2(t-t_0)} & \frac{1}{5}e^{3(t-t_0)} - \frac{1}{5}e^{-2(t-t_0)} \\ \frac{4}{5}e^{3(t-t_0)} - \frac{4}{5}e^{-2(t-t_0)} & \frac{1}{5}e^{3(t-t_0)} + \frac{4}{5}e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1)

$$E(t_0,t_0) = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} + \frac{1}{5} & \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} - \frac{4}{5} & \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

2) $\quad E(t,t_0) = E(t-t_0,0)$ in einem autonomen System!

3) $\quad E(t,t_0)^{-1} = E(t_0,t)$ hier — einfach ersetze $t-t_0$ mit $-(t-t_0) = t_0 - t$!

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

lautet $x(t) = E(t,t_0)c$ mit beliebigem $c \in \mathbb{R}^d$.

Eine äquivalente Darstellung dieser allgemeinen homogenen Lösung lautet

$$\boxed{x(t) = U(t)c = \sum_{j=1}^{d} c_j\, u_j(t)}$$

d.h., eine lineare Kombination der d Lösungen $u_1(t)$, …,$u_d(t)$ ein für beliebiges $c = (c_1,\ldots,c_d)^\top \in \mathbb{R}^d$.

Warum?

1) $U(t)c = [u_1(t)|\ \cdots |\ u_d(t)] \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} = c_1u_1(t) + \cdots + c_du_d(t)$

2)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{d} c_ju_j(t)\right) = \sum_{j=1}^{d} c_j\frac{d}{dt}u_j(t) = \sum_{j=1}^{d} c_jAu_j(t) = A\left(\sum_{j=1}^{d} c_ju_j(t)\right) = Ax(t)$$

weil die $u_j(t)$ homogene Lösungen und die c_j Skalaren sind.

d.h. $\quad x(t) = \sum_{j=1}^{d} c_j\, u_j(t)$ ist homogene Lösung !

3) Wir können die Gleichung $\boxed{x(t_0) = U(t_0)c = x_0}$ für einen beliebigen Anfangswert $x(t_0) = x_0$ stets lösen

$$\Longrightarrow \quad c = U(t_0)^{-1}x_0 \quad \Longrightarrow \quad x(t) = U(t)U(t_0)^{-1}x_0 \quad \text{d.h.} \quad = E(t,t_0)x_0$$

wegen der Voraussetzung, dass die d Lösungen $u_1(t)$, …, $u_d(t)$ linear unabhängig sind.

Jetzt betrachte die inhomogene DG

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + h(t).$$

Sei $\phi(t)$ eine bekannte Lösung (sonst beliebig) und sei $x(t)$ eine andere Lösung. Dann ist $x(t) - \phi(t)$ eine homogene Lösung,

$$\frac{d}{dt}(x-\phi) = \frac{dx}{dt} - \frac{d\phi}{dt} = \{A(t)x + h(t)\} - \{A(t)\phi + h(t)\} = A(t)x - A(t)\phi = A(t)(x-\phi)$$

und es existieren Konstanten $c_1, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$, so dass

$$x(t) - \phi(t) = \sum_{j=1}^{d} c_j u_j(t) \qquad \text{allgemeine homogene Lösung.}$$

Daher lautet die allgemeine inhomogene Lösung

$$\boxed{x(t) = \sum_{j=1}^{d} c_j u_j(t) + \phi(t) = U(t)c + \phi(t)}$$

d.h. die Summe der allgemeinen homogenen Lösung und einer bekannten inhomogenen Lösung für einen belibigen Anfangswert.

Für den Anfangswert $x(t_0) = x_0$ erhalten wir

$$x(t_0) = x_0 = U(t_0)c + \phi(t_0) \quad \Longrightarrow \quad U(t_0)c = x_0 - \phi(t_0) \quad \Longrightarrow \quad c = U(t_0)^{-1}(x_0 - \phi(t_0))$$

d.h.

$$x(t) = U(t)U(t_0)^{-1}(x_0 - \phi(t_0)) + \phi(t) = E(t,t_0)x_0 + \underbrace{\{\phi(t) - E(t,t_0)\phi(t_0)\}}_{=\int_{t_0}^{t} E(t,s)h(s)\,ds}$$

und daher die Lösungsformel

$$\boxed{x(t) = E(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} E(t,s)h(s)\,ds}$$

sowie

$$\phi(t) = E(t,t_0)\phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} E(t,s)h(s)\,ds$$

Bemerkung Der Anfangswert $\phi(t_0)$ muss nicht gleich null sein, wie für die inhomogene Lösung $\int_{t_0}^{t} E(t,s)h(s)\,ds$!

Die beiden Darstellungen der inhomogenen Lösung sind tatsächlich (und offensichtlich) äquivalent. Wir benutzen die Version, die für einen gegebnen Aufgabe günstiger ist.

Beispiel Betrachte die inhomogene DG

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{pmatrix} -t \\ t- \end{pmatrix}$$

wir haben oben gesehen, dass

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \qquad u_2(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ 4e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

zwei unabhängige homogene Lösungen sind . Man bestätigt direkt, dass

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ t - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

eine inhomogene Lösung ist:

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ t - \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\ \frac{1}{6} \\ \frac{d}{dt}\left(t - \frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ t - \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ die allgmeinene inhomogene Lösung ist

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + \phi(t) \\ &= c_1\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ 4e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ t - \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1e^{3t} - c_2e^{-2t} + \frac{1}{6} \\ c_1e^{3t} + 4c_2e^{-2t} + t - \frac{1}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Betrachte den Anfangswert $x(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \qquad c_1 - c_2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, \qquad c_1 + 4c_2 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = c_2 = \frac{1}{3}$$

und die gesuchte Lösung lautet

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3}e^{3t} + \frac{4}{3}e^{-2t} + t - \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

<u>oder</u> durch die Lösungsformel

$$x(t) = E(t,0)x_0 + \int_0^t E(t,s)h(s)\,ds$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} \frac{4}{5}e^{3t} + \frac{1}{5}e^{-2t} & \frac{1}{5}e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2t} \\ \frac{4}{5}e^{3t} - \frac{4}{5}e^{-2t} & \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ &\quad + \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{4}{5}e^{3(t-s)} + \frac{1}{5}e^{-2(t-s)} & \frac{1}{5}e^{3(t-s)} - \frac{1}{5}e^{-2(t-s)} \\ \frac{4}{5}e^{3(t-s)} - \frac{4}{5}e^{-2(t-s)} & \frac{1}{5}e^{3(t-s)} + \frac{4}{5}e^{-2(t-s)} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix} ds \\ &= \cdots \qquad \text{echt mühsam !} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{benutze MAPLE} \end{aligned}$$

Kapitel 15

Fundamentale Matrizen nochmal

Wie können wir die fundamentale Matrix $E(t, t_0)$ einer homogenen DGL

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

in $\mathbb{R}^d$ herleiten?

Äquivalent: wie können wir d linear unabhängige Lösungen $u_1(t)$, $\cdots$, $u_d(t)$ dieser homogenen DGL finden ?

$$\Longrightarrow \qquad E(t, t_0) = U(t)U(t_0)^{-1} \qquad \text{mit} \qquad U(t) = [u_1(t)| \ \cdots | \ u_d(t)]$$

Es gibt verschiedene Tricks, die in Sonderfällen ntzlich verwendbar sind.

15.1 1. Methode: Direkte Integration der DGL

Wenn die Koeffizientenmatrix $A(t)$ eine diagonale oder obere/untere dreieckige Struktur besitzt, dann können wir die DGL systematisch komponentweise integrieren.

Beispiel: Betrachte die DGL

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x$$

Das entsprechende System skalarer DGLen lautet:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2x_1 + x_1 + 2x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 2x_2 + x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= 2x_3 \end{aligned}$$

Die drittete Gleichung hier enthält nur die Variable x_3, d.h.

$$\frac{dx}{dt} = 2x_3$$

und kann gelöst sein mit Hilfe eines integriereden Faktors:

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{x_3(t) = x_{30} e^{2(t-t_0)}}$$

Die zweite Gleichung enthält die unbekannte Variable x_2 und die bekannte Variable x_3.

$$\Longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 2x_2 + x_3 = 2x_2 + x_{30}\, e^{2(t-t_0)},$$

d.h. sie eine inhomogene lineare DGL

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\frac{dx_2}{dt} - 2x_2}_{\text{lineare DGL}} \; = \; \underbrace{x_{30}\, e^{2(t-t_0)}}_{\text{bekannte „Treibkraft“}}$$

und der <u>integrierende Faktor</u> hier lautet

$$\mu_2(t) = e^{\int^t (-2) ds} = e^{-2t}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{-2t}\frac{dx_2}{dt} - 2e^{-2t}x_2 = x_{30}\, e^{2(t-t_0)}\, e^{-2t} \qquad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left\{e^{-2t}\, x_2\right\} = x_{30}\, e^{-2t_0}$$

Integration von (t_0, x_{20}) bis $(t, x_2(t))$ ergibt

$$e^{-2t}\, x_2(t) - e^{-2t_0} x_{20} = x_{30}\, e^{-2t_0}\, (t - t_0)$$

oder

$$\boxed{x_2(t) = x_{20} e^{2(t-t_0)} + x_{30}\, (t-t_0) e^{2(t-t_0)}}$$

Die erste Gleichung ist dann

$$\underbrace{\frac{dx_1}{dt} - 2x_1}_{\text{unbekannt}} = \underbrace{x_2(t) + 2x_3(t)}_{\text{bekannt}}$$

<u>d.h.</u> die inhomogene lineare DGL

$$\frac{dx_1}{dt} - 2x_1 = x_{20}\, e^{2(t-t_0)} + x_{30}\, (t-t_0) e^{2(t-t_0)} + 2x_{30} e^{2(t-t_0)}.$$

Der integrierender Faktor hier ist auch $\mu_1(t) = e^{\int^t (-2)\, ds} = e^{-2t}$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{e^{-2t}\frac{dx_1}{dt} - 2e^{-2t}x_1}_{\frac{d}{dt}\{e^{-2t}\, x_1\}} = x_{20} e^{-2t_0} + x_{30}(t-t_0) e^{-2t_0} + 2x_{30}\, e^{-2t_0}$$

Integrieration von (t_0, x_{10}) bis $(t, x_1(t))$ ergibt

$$\begin{aligned} e^{-2t}\, x_1(t) - e^{-2t_0}\, x_{10} \quad &= \quad x_{20}\, e^{-2t_0}\, (t-t_0) + \frac{1}{2}\, x_{30}\, (t-t_0)^2\, e^{2(t-t_0)} \\ &\qquad + 2\, x_{30}\, (t-t_0)\, e^{2(t-t_0)} \end{aligned}$$

<u>d.h.</u>

$$\boxed{x_1(t) = x_{10}\, e^{2(t-t_0)} + x_{20}\, (t-t_0) e^{2(t-t_0)} + x_{30}\, \left\{2(t-t_0) + \frac{1}{2}(t-t_0)^2\right\} e^{2(t-t_0)}}$$

mit (von oben)

$$\boxed{x_2(t) = x_{20} \cdot e^{2(t-t_0)} + x_{30} \cdot (t-t_0) \cdot e^{2(t-t_0)}}$$

und

$$\boxed{x_1(t) = x_{30} \cdot e^{2(t-t_0)}}$$

oder in der Vektor-Matrix-Form

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2(t-t_0)} & (t-t_0)\, e^{2(t-t_0)} & 2(t-t_0)\, e^{2(t-t_0)} + \frac{1}{2}(t-t_0)^2\, e^{2(t-t_0)} \\ 0 & e^{2(t-t_0)} & (t-t_0)\, e^{2(t-t_0)} \\ 0 & 0 & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix hier gleich $E(t,t_0)$ ist, weil die Lösung eindeutig ist mit $x(t) = E(t,t_0)x_0$, d.h.

$$.E(t,t_0) = \begin{bmatrix} e^{2(t-t_0)} & (t-t_0)\, e^{2(t-t_0)} & 2(t-t_0)\, e^{2(t-t_0)} + \frac{1}{2}(t-t_0)^2\, e^{2(t-t_0)} \\ 0 & e^{2(t-t_0)} & (t-t_0)\, e^{2(t-t_0)} \\ 0 & 0 & e^{2(t-t_0)} \end{bmatrix}.$$

15.2 2. Methode: Reduktion auf eine skalare DGL höherer Ordung

Wir eliminieren $d-1$ Variablen und erhalten eine skalare DGL d-ter Ordnung bezglich der überlebenden Variablen.

Beispiel: Betrachte die vektorwertige DGL

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & \frac{2}{t} \\ \frac{-1}{t} & \frac{4}{t} \end{bmatrix} x \qquad t \neq 0$$

Das ensprechende System skalarer DGLen lautet

$$\begin{aligned} t\frac{dx_1}{dt} &= x_1 + 2x_2 \\ t\frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

Wir werden die Variable x_1 eliminieren und eine skalare DGL zweiter Ordnung bzg. x_2 herleiten

Differenziere die zweite Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left[t\frac{dx_2}{dt}\right] = t\frac{d^2x_2}{dt^2} + 1\,\frac{dx_2}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left[-x_1 + 4x_2\right] = -\frac{dx_1}{dt} + 4\frac{dx_2}{dt}$$

d.h.

$$t\frac{d^2x_2}{dt^2} - 3\frac{dx_2}{dt} = -\frac{dx_1}{dt}.$$

Ersetze $\dfrac{dx_1}{dt}$ hier durch die erste Gleichung

$$\Longrightarrow \quad t\frac{d^2x_2}{dt^2} - 3\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{t}\{x_1 + 2x_2\} \qquad \Longrightarrow \quad t^2\frac{d^2x_2}{dt^2} - 3t\frac{dx_2}{dt} + 2x_2 = -x_1$$

und dann ersetze x_1 durch die zweite Gleichung, d.h. durch

$$x_1 = 4x - 2 - t\frac{dx_2}{dt}.$$

$$\Longrightarrow \qquad t^2\frac{d^2x_2}{dt^2} - 3t\frac{dx_2}{dt} + 2x_2 = -4x_2 + t\frac{dx_2}{dt}.$$

Wir erhalten eine skalare DGL zweiter Ordnung in x_2

$$\boxed{t^2\frac{d^2x_2}{dt^2} - 4t\frac{dx_2}{dt} + 6x_2 = 0}$$

die eine Euler-DGL heißt.

Wir benutzen den Lösungsansatz $\boxed{x_2(t) = t^\lambda}$

$$\Longrightarrow \qquad [\lambda(\lambda-1) - 4\lambda + 6]\, t^\lambda \equiv 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(\lambda-1) - 4\lambda + 6 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = +2, \quad \lambda_2 = +3$$

und wir erhalten zwei unabhängige Lösungen für $x_2(t)$, nämlich

$$x_{2a}(t) = t^2, \qquad x_{2b}(t) = t^3$$

Wir können die entsprechenden Lösungen für $x_1(t)$ durch die zweite Gleichung finden.

$$x_1(t) = 4x_2(t) - t \cdot \frac{dx_1}{dt}(t)$$

1) mit $x_{2a}(t) = t^2 \quad \Longrightarrow \quad x_{1a}(t) = 4t^2 - t \cdot 2t = 2t^2$

2) mit $x_{2b}(t) = t^3 \quad \Longrightarrow \quad x_{1b}(t) = 4t^3 - t \cdot 3t^2 = t^3$

Wir erhalten zwei unabhängige Lösungen für die ursprüngliche vektorwertige DGL:

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}, \qquad u_2(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad (t \neq 0 \quad \text{hier})$$

Definiere

$$U(t) = [u_1(t) \mid u_2(t)] = \begin{bmatrix} 2t^2 & t^3 \\ t^2 & t^3 \end{bmatrix}$$

Die fundamentale Matrix ist dann

$$E(t, t_0) = U(t)U(t_0)^{-1} \qquad \text{für} \quad t, t_0 > 0 \quad \underline{\text{ oder für }} \quad t, t_0 < 0$$

15.3 3. Methode –nur für konstante Koeffizientenmatrizen

Wir betrachten die homogene vektorwertige DGL

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

in $\mathbb{R}^d$ d.h. mit einer konstanten Koeffizientenmatrix $A(t) \equiv A$ für alle $t \in \mathbb{R} \implies$

1) die Lösungen existieren für alle $t \in \mathbb{R}$

2) die DGL ist autonom $\implies$ die Lösungen hängen nur von der verlaufenen Zeit $t - t_0$ ab.

Wir werden den folgenden Lösungsansatz verwenden: die Lösungen sind der Form

$$\boxed{x(t) = ve^{\lambda t}}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

$$\implies \quad \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\{v^e\lambda t\} = v\frac{d}{dt}\{e^{\lambda t}\} = v\{\lambda e^{\lambda t}\} = \lambda ve^{\lambda t}$$

und

$$Ax(t) = A\{ve^{\lambda t}\} = \{Av\}e^{\lambda t}$$

Daher brauchen wir

$$\{Av - \lambda v\}\, e^{\lambda t} \equiv 0 \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \iff \qquad \boxed{Av = \lambda v}$$

d.h. λ und v sind entsprechende Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix A.

Bemerkung: (Lineare Algebra) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \implies v_1, v_2$ linear unabhängig

Beispiel Betrachte die DGL

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x \qquad \implies \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det[A - \lambda I] = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & -1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3) = 0$$

für $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 3$, die Eigenwerte von A.

Die entsprechenden Eigenvektoren sind

$$\underline{\lambda_1 = -2} \qquad [A - \lambda I]v_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} v_1 = 0 \qquad \implies \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = +3} \qquad [A - \lambda_2 I]v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} v_2 = 0 \qquad \implies \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir haben zwei unabhängige Lösungen

$$\begin{aligned} u_1(t) &= v_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ 4e^{-2t} \end{pmatrix} \\ u_2(t) &= v_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und die Matrix

$$U(t) = [u_1(t)|\ u_2(t)] = \begin{bmatrix} -e^{-2t} & e^{3t} \\ 4e^{-2t} & e^{3t} \end{bmatrix}$$

ist invertierbar. Daher lautet die fundamentale Matrix $E(t, t_0) = U(t)U(t_0)^{-1}$ (siehe das vorherige Kapitel).

Aber wir können nicht immer d unabhängige Eigenvektoren finden, z.B.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ und

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist der einzige Eigenvektor!

Was machen wir in diesem Fall?

Kapitel 16

Die Matrixexponentialfunktion

Wir betrachten die autonome lineare DGL

$$\frac{dx}{dt} = Ax,$$

in $\mathbb{R}^d$ und nehmen an, dass wir d linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, \cdots, v_d$ kennen.

Dann ist aus der linearen Algebra bekannt, dass die Abbildung

$$y \longrightarrow x = Py = \sum_{j=1}^{d} y_j v_j \qquad \text{mit} \quad P = [v_1| \ \cdots | \ v_d]$$

eine Koordinatentransformaton ist.

Was passiert mit A unter dieser Transformation ?

$$AP = [Av_1| \ \cdots | \ Av_d] = [\lambda v_1| \ \cdots | \ \lambda_d v_d] = P \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_d \end{bmatrix}}_{=:\Lambda} = A\Lambda \qquad \Longrightarrow P^{-1}AP = \Lambda$$

Für die obige DGL bedeutet dies

$$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d(P^{-1}x)}{dt} = P^{-1}\frac{dx}{dt} = P^{-1}Ax = P^{-1}APy = \Lambda y$$

und daher

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda y \qquad \Longrightarrow \qquad y(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_d t} \end{bmatrix} y_0.$$

In den ursprünglichen Koordinaten lautet die Lösung

$$x(t) = Py(t) = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_d t} \end{bmatrix} P^{-1}x_0$$

Aus der skalaren Reihendarstellung

$$e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} t \cdots t \frac{\lambda^k t^k}{k!} + \cdots$$

folgt:

$$P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_d t} \end{bmatrix} P^{-1} = P \left(I + \Lambda t + \frac{1}{2!}\Lambda^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\Lambda^k t^k \cdots \right) P^{-1}$$

Wenn wir P und P^{-1} in diese unendliche Summe hineinziehen (wir sehen später, warum das erlaubt ist), folgt

$$\begin{aligned} I + P\Lambda P^{-1} t + \frac{1}{2} P\Lambda^2 P^{-1} t^2 + \cdots &= I + P\Lambda P^{-1} t + \frac{1}{2}(P\Lambda)\underbrace{(P^{-1}P)}_{=I}\left(\Lambda P^{-1}\right) t^2 + \cdots \\ &= I + P\Lambda P^{-1} t + \frac{1}{2}\left(P\Lambda P^{-1}\right)\left(P\Lambda P^{-1}\right) t^2 + \cdots \\ &= I + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \cdots . \cdots \end{aligned}$$

Dies führt auf die folgende Definition:

<u>Definition:</u> Für eine $d \times d$ Matrix A <u>definieren</u> wir die Matrixexponential

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots .$$

<u>Lemma:</u> *Für alle $d \times d$ Matrizen A konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. Darüber hinaus gilt die Ableitungsregel*

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A\, e^{At}$$

für $t \in \mathbb{R}$ und die Matrixexponentialfunktion $e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$.

Beweis:: Für eine $d \times d$ Matrix B bezeichnen wir die Einträge mit $(B)_{i,j}$, $i,\ j = 1, \cdots, d$

Zum Beweis des Lemmas zeigen wir, dass jeder Eintrag der Reihe absolut konvergiert, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{k!} (A^k)_{i,j} \right| < \infty. \qquad (**)$$

Daraus folgt die behauptete Konvergenz in jeder Komponente, also auch für die gesamte Reihe.

Zum Beweis von (**) definiere $\alpha := \max\left\{ |(A)_{i,j}| \ : \ i, j, \cdots, d \right\}$. Dann lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$\left| (A^k)_{i,j} \right| \leq d^{k-1} \alpha^k$$

gilt. Also folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{k!} (A^k)_{i,j} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d^{k-1} \alpha^k = \frac{1}{d} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (d\alpha)^k = \frac{1}{d} e^{d\alpha} < \infty,$$

und damit (**).

Zum Beweis der Ableitungsregel beachte, dass aus der absoluten Konvergenz der Reihe folgt, dass die Reihe

$$t \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$$

unendlichen Konvergenzradius besitzt. Somit dürfen wir termweise ableiten, und es folgt

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \frac{d}{dt} t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} A^k t^{k-1} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} t^{-1} = A e^{At}$$

■

Satz 10 *Die Matrixexponentialfunktion* e^{At} *ist die Fundamentalmatrix* $E(t, 0)$ *der Differentialgleichung*

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

Beweis:: $e^{A0} = I$ folgt direkt aus der Definition, des Weiteren folgt aus dem vorhergehenden Lemma, dass

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At}$$

gilt, d.h. e^{At} löst die matrixwertige AWA

$$\frac{dX}{dt} = AX, \qquad X(0) = I.$$

Da $E(t, 0)$ die eindeutige Lösung dieser AWA ist, folgt $E(t, 0) = e^{At}$ und damit die Behauptung.

■

16.0.1 Wie berechnet man e^{At} ? : diagonalisierbarer Fall

Falls A diagonalisierbar ist (d.h. d linear unabhängige Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_d$ besitzt), wissen wir bereits aus der Einleitung, wie e^{At} aussieht. Sei $\Lambda = P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix mit Komponenenten $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$. Dann gilt

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & e^{\lambda_d t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

Beispiel: Sei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$, also sind $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = -2$ Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenvektoren berechnen sich zu

$$(A - 3I)v_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + 2I)v_2 = 0 \iff \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Offenbar sind v_1 und v_2 linear unabhängig, also definiert

$$P = [v_1|\ v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

eine Koordinatentransformation und es gilt

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Also

$$\begin{aligned} e^{At} = Pe^{At}P^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{5}e^{3t} + \frac{1}{5}e^{-2t} & \frac{1}{5}e^{3t} - \frac{1}{5}e^{-2t} \\ \frac{4}{5}e^{3t} - \frac{4}{5}e^{-2t} & \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Das gleiche Verfahren funktioniert auch bei komplexen Eigenwerten und Vektoren.

<u>Beispiel:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \lambda_1 = \imath, \lambda_2 = -\imath,$$

wobei $\imath = \sqrt{-1}$, mit zugehörigen Eigenvektoren

$$(A - \imath I)v_1 = 0 \iff \begin{bmatrix} -\imath & -1 \\ 1 & -\imath \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} \imath \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + \imath I)v_2 = 0 \iff \begin{bmatrix} \imath & -1 \\ 1 & \imath \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} \imath \\ -1 \end{pmatrix}$$

und daher mit

$$P = [v_1|\ v_2] = \begin{bmatrix} \imath & \imath \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\imath & 1 \\ -\imath & -1 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \imath & 0 \\ 0 & -\imath \end{bmatrix}$$

Also

$$e^{At} = Pe^{\Lambda t}P^{-1} = \begin{bmatrix} \imath & \imath \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{\imath t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-\imath t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\imath & 1 \\ -\imath & -1 \end{bmatrix}$$

Erinnerung: Euler-Formel $\boxed{e^{\pm \imath t} = \cos t \pm \imath \sin t}$

$$2\cos t = e^{\imath t} + e^{-\imath t}, \qquad 2\sin t = -\imath e^{\imath t} + \imath e^{-\imath t}.$$

16.0.2 Wie berechnet man e^{At} ? : nichtdiagonalisierbarer Fall

Leider sind Matrizen im Allgemeinen nichtdiagonalisierbar, d.h. es gibt keine d linear unabhängigen Eigenvektoren.

In diesem Fall müssen wir auf die Jordan-Normalform zurückgreifen.

Erinnerung aus der linearen Algebra: Sei A eine $d \times d$ Matrix mit genau $m \leq d$ linear unabhängigen Eigenvektoren $v_i, i = 1, \cdots, m$ zu Eigenwerten λ_i, $i = 1, \cdots, m_i$. Dann gibt es eine Koordinatentransformation P, so dass

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & J_m \end{bmatrix}$$

Die Matrix J heißt Jordan-Normalform und besteht aus m Jordan-Blöcken $J_1, i = 1, \cdots, m$, die $d_i \times d_i$ Matrizen sind mit $\sum\limits_{i=1}^{m} d_i = d$, und die folgende Form haben:

$$J_i = [\lambda_i], \quad d_i = 1, \qquad \text{oder} \qquad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad d_i > 1.$$

Die Spalten von P sind dabei die verallgemeinerten Eigenvektoren. Für einen Jordanblock J_i der Dimension d_i gilt:

$$e^{J_i t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{1}{(d_i-1)!}t^{d_i-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(d_i-2)!}t^{d_i-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_i t}.$$

Allgemein gilt analog zum diagonalisierbaren Fall

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_m t} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Beispiel: Betrachte die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Diese Matrix hat zwar 3 Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$, aber nur $m = 2$ linear unabhängige Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \lambda_1 = -2 \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda_2 = 4$$

und ist damit nichtdiagonalisierbar.

Die zugehörige Jordan-Normalform ist demnach

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Zur Bestimmung von P, beachte, dass der fehlende Vektor v_3 (ein verallgemeinterter Eigenvektor) erfüllen muss

$$Av_3 = v_2 + 4v_3.$$

Dies erfüllt z.B. $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also ergibt sich

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix} P^{-1} = \cdots$$

siehe MAPLE Ausgabe!

16.1 Langzeitverhalten linearer DGL

Die allgemeine Lösung e^{At} kann nicht nur zur Berechnung von Lösungen linearer Differentialgleichungen verwendet werden, sondern auch zur „abstrakten"Analyse des Verhaltens der Lösungen.

Wir werden jetzt exemplarisch das Langzeitverhalten der Lösungen von

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

untersuchen und dabei insbesondere nach Kriterien suchen, die sich dirket aus Eigenschaften von A ablesen lassen.

Fragen: *Gegeben die obige Differentialgleichung*

a) *Gibt es Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^d$, so dass $\|x(t, x_0)\| \to 0$ für $t \to \infty$?*

b) *Wann gilt $\lim_{t \longrightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| \longrightarrow 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$*

c) Gibt es Anfangswerte $x_0 \in \mathbb{R}^d$*, so dass* $\|x(t,x_0)\| \longrightarrow \infty$ *für* $t \longrightarrow \infty$*?*

d) Wann gilt c) für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ *?*

Wir beantworten zunächst a) und c).

Satz 11 *Sei* v *ein Eigenvektor von* A *mit Eigenwert* $\lambda = a + \imath b$*. Dann gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t,v)\| = 0, \quad \textit{falls} \quad Re(\lambda) = a < 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t,v)\| = \infty, \quad \textit{falls} \quad Re(\lambda) = a > 0$$

und weder $\lim_{t\to\infty} \|x(t,v)\| = 0$ *noch* $\lim_{t\to\infty} \|x(t,v)\| = \infty$*, falls* $Re(\lambda) = 0$

Beweis:: Wähle eine Koordinatentransformation P, die A in Jordan-Normalform transformiert, d.h. $P^{-1}AP = J$. O.B.d.A können wir P so wählen, dass der Eigenwert λ aus der Annahme zu J_1 gehört.

Daraus folgt $v = Pe_1$ mit $e_1 = (10\cdots 0)^T$.

Aus der Darstellung von $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$ folgt

$$x(t,v) = e^{At}v = Pe^{Jt}P^{-1}v = Pe^{Jt}e_1 = P \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e^{\lambda t}v.$$

Nun gilt

$$\lim_{t\to\infty} \left| e^{\lambda t} \right| = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad Re(\lambda) < 0 \\ \infty, & \text{falls} \quad Re(\lambda) > 0 \end{cases}$$

mit

$$|e^{\lambda t}| \equiv 1 \qquad \text{für alle } t \geq 0, \quad \text{falls} \quad Re(\lambda) = 0$$

sowie

$$c_1|e^{\lambda t}| \leq \|e^{\lambda t}v\| \leq c_2|e^{\lambda t}|$$

für passende Konstanten $c_1 \leq c_2$ (falls λ und v reellwertig sind ist $c_1 = c_2 = \|v\|$).

Daraus folgt sofort die Behauptung. ■

Satz 12 *Sei* A *eine* $d \times d$ *Matrix mit* m *Eigenwerten* $d_1, \cdots, d_m$*. Dann gilt*

a) falls $\max\{Re(\lambda_i) | i = 1, \cdots m\} < 0$*, so gilt* $\lim_{t\to\infty} \|x(t,x_0)\| = 0$ *für alle* $x_0 \in \mathbb{R}^d$

b) falls $\min\{Re(\lambda_i) | i = 1, \cdots m\} > 0$*, so gilt* $\lim_{t\to\infty} \|x(t,x_0)\| = \infty$ *für alle* $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

Beweis:: Für a) wähle P, so dass $J = P^{-1}AP$ in Jordan-Normalform ist. Sei zunächst $x_0 = Pe_i$, sei J_k der zu e_i gehörige Jordan-Block und entsprechende verallgemeinte Eigenvektoren $v_{i,1}, \cdot, v_{i,d_i}$.

Dann gilt

$$x(t,x_0) = Pe^{Jt}P^{-1}x_0 = Pe^{Jt}e_i = \underbrace{\sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{j!} t^j e^{\lambda_k t} v_{i,j}}_{\to 0 \text{ für } t\to\infty} \to 0 \text{ für } t \to \infty.$$

Für allgemeines $x_0 = \sum\limits_{i=1}^{d} d_i Pe_i$ ist

$$x(t,x_0) = e^{At}x_0 = e^{At}\sum_{i=1}^{d} d_i Pe_i = \sum_{i=1}^{d} d_i e^{At} Pe_i = \sum_{i=1}^{d} d_i \underbrace{x(t, Pe_i)}_{\to 0}$$

Da jeder Summand gegen 0 geht, gilt dies auch für die Summe nach obiger Rechnung.

Der Beweis von b) ist analog. ■

Frage: *Was pasiert im Fall* $\max / \min Re(\lambda_i) = 0$ *?*

Dies ist nicht allgemein zu beantworten, wie die folgenden Beispiele belegen:

Beispiel 1: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und $e^{\lambda_i t} \equiv 1$, d.h. $x(t,x_0) \equiv x_0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und alle $t \geq 0$.

$\implies$ weder Konvergenz noch Divergenz hier

Beispiel 2: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie gibt es im Gegensatz zu Beispiel 1 nur einen Eigenvektor $v_1 = \binom{1}{0}$ zu $EW \lambda_1 = 0$.
Es gilt

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also folgt

$$x(t,v_1) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \binom{1}{0} = \binom{1}{0}.$$

Der enstrpechende verallgemente Eigenvektor lautet $v_2 = \binom{0}{1}$ (löse $Av_2 = 0v_2 + v_1$) mit

$$x(t,v_2) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \binom{0}{1} = \binom{t}{1}$$

und damit

$$\|x(t, v_2)\| = \left\| \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{t^2 + 1} \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad t \longrightarrow \infty.$$

Für Eigenwerte mit Realteil gleich Null muss man also die Struktur der Matrix genauer analysieren.

Kapitel 17

Skalare lineare DGLen höherer Ordnung

Die Standardform einer skalaren linearen DGLenn-ter Ordnung lautet

$$\boxed{\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = b(t)}$$

wobei die Koeffizientenfunktionen $a_0(t), \cdots, a_{n-1}(t)$ und die Treibkraftfunktion $b(t)$ stetig sind, (z.B. für $t \in (\gamma, \delta) \subset \mathbb{R}$).

Wir haben schon (in Fall $n = 2$) gesehen, dass die allgemeine Lösung lautet

$$\boxed{x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(t) + z(t),}$$

wobei $z(t)$ eine bekannte inhomogene Lösung ist und $u_1(t), \cdots, u_n(t)$ $\quad n$ unabhängige homogene Lösungen sind.

Warum ? Wir können die obige skalare DGL als eine n-dimensionale vektorwertige DGL

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x} + \underline{h}(t)$$

umschreiben, wobei

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{dx}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \end{pmatrix}, \qquad \underline{h}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \qquad \text{(Vektoren in } \quad \mathbb{R}^n\text{),}$$

und

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} \qquad (n \times n \quad \text{Matrix).}$$

Seien $u_1(t), \cdots, u_n(t)$, n Lösungen der skalaren homogenen DGL, d.h. mit $b(t) \equiv 0$.
Dann sind

$$\underline{u_1}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \dfrac{du_1}{dt}(t) \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}u_1}{dt^{n-1}}(t) \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \underline{u_n}(t) = \begin{pmatrix} u_n(t) \\ \dfrac{dn_1}{dt}(t) \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}u_n}{dt^{n-1}}(t) \end{pmatrix}$$

n Lösungen der vektorwertigen homogenen DGL

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x}.$$

Die $n \times n$ Matrix

$$U(t) = \left[\underline{u_1}(t) | \ \cdots | \ \underline{u_n}(t)\right] = \begin{bmatrix} u_1(t) & \cdots & u_n(t) \\ \dfrac{du_1}{dt}(t) & \cdots & \dfrac{du_n}{dt}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}u_1}{dt^{n-1}}(t) & \cdots & \dfrac{d^{n-1}u_n}{dt^{n-1}}(t) \end{bmatrix}$$

heißt Wronski-Matrix und die Determinante dieser Matrix heißt Wronski-Determinante,

$$w(t) := \det U(t) = \det \left[\underline{u_1}(t) | \ \cdots | \ \underline{u_n}(t)\right].$$

Satz 13 *Die Wronski-Determinante $w(t)$ genügt der skalaren linearen DGL*

$$\frac{dw}{dt} + a_{n-1}(t)w = 0.$$

Der Beweis, für allgemeines $n \geq 2$ ist algebraisch unangenehm, aber für $n = 2$ einfach.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}w(t) &= \frac{d}{dt}\det \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dfrac{du_1(t)}{dt} & \dfrac{du_2}{dt}(t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{d}{dt}\left\{u_1(t)\frac{du_2}{dt}(t) - u_2(t)\frac{du_1}{dt}(t)\right\} \\ &= u_1(t)\frac{d^2u_2}{dt^2}(t) - u_2(t)\frac{d^2u_1}{dt^2}(t) \end{aligned}$$

(wegen der Produktregel und Auslöschung und weil u_1, u_2 homogene Lösungen sind)

$$\begin{aligned} &= u_2(t)\{-a_1(t)\,\frac{du_2}{dt}(t) - a_0(t)\,u_1(t)\} \\ &= a_1(t)\left\{u_1(t)\frac{du_2}{dt}(t) - u_2(t)\frac{u_1}{dt}(t)\right\} \\ &= -a_1(t)\,\det \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \dfrac{du_1(t)}{dt} & \dfrac{du_2}{dt}(t) \end{bmatrix} = -a_1(t)\,w(t) \end{aligned}$$

■

Die Lösung der obigen DGL lautet

$$\boxed{w(t) = w(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)\,ds}}$$

Dann gilt entweder

$$w(t_0) = 0 \implies \quad w(t) \equiv 0 \quad \text{für alle } t$$

oder

$$w(t_0) \neq 0 \implies \quad w(t) \neq 0 \quad \text{für alle } t$$

d.h die Lösungen $\underline{u_1}, \cdots, \underline{u_n}(t)$ sind entweder linear unabhängig für alle t oder linear unabhängig für alle t.

Setze voraus, dass $w(t_0) \neq 0$ ist. Dann ist die Wronski-Matrix invertierbar für alle t, und

$$E(t, t_0) = U(t)U(t_0)^{-1}$$

ist die fundamentale Matrix der vektorwertigen linearen DGL.

Die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = A(t)\underline{x}, \qquad \text{mit } \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

lautet

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) = E(t, t_0)\underline{x} &= U(t)U(t_0)^{-1}\underline{x_0} \\ &= U(t)\underline{c} \qquad \text{mit } = \underline{c} = U(t_0)^{-1}\underline{x_0} \\ &= \left[\underline{u_1}(t)| \ \cdots | \ \underline{u_n}(t)\right] \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} c_j \underline{u_j}(t) \end{aligned}$$

d.h die allgemeine homogene Lösung lautet

$$\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \underline{u_j}(t).$$

Wir könen $x(t_0) = x_0 = U(t_0)\underline{c}$ für $\underline{c}$ immer lösen, genau dann, wenn $U(t_0)$ invertierbar ist, d.h. $w(t_0) \neq 0$.

Der erste Komponente dieser Lösung lautet

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(t)$$

d.h die allgemeine homogene Lösung der entsprechenden skalaren DGL.

Wir haben vorher gesehen, dass die allgemeine inhomogene Lösung der vektorwertigen DGL lautet

$$\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \underline{u_j}(t) + \underline{z}(t),$$

wobei $\underline{z}(t)$ eine bekannte (sonst beliebige) inhomogene Lösung ist. Der erste Komponent dieser vektorwertigen Lösung lautet

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(t) + z(t)$$

d.h. die allgemeine inhomogene Lösung der skalaren DGL !

Betrachte den Sonderfall mit konstanten Koeffizienten.

$$a_0(t) \equiv a_0, \quad a_1(t) \equiv a_1, \cdots, a_{n-1}(t) \equiv a_{n-1}.$$

Dann haben wir eine konstante Koeffizienten-Matrix $A(t) \equiv A$, mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von A lautet

$$\begin{aligned} \det[\lambda I - A] &= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen dieses Polynoms (reell- oder komplexwertig), d.h.

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Diese Gleichung ist genau die Gleichung, die wir erhalten, wenn wir den Lösungsansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

für die Lösungen der skalaren homogenen DGL benutzen.

17.1 Variationen der Konstanten

Wir können diese Methode zu dem allgemeinen Fall mit $n \geq 2$ verallgemeinern.

Seien $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ n unabhängige homogene Lösungen. Wir suchen eine inhomogene Lösung der Form

$$z(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) u_j(t),$$

d.h wir müssen geeignete Koeffizientenfunktionen $c_1(t)$, ..., $c_n(t)$ finden. Für diese n Unbekannten brauchen wir n Gleichungen herzuleiten.

Eine dieser Gleichungen ist die inhomogene DGL für $z(t)$, d.h.

$$\frac{d^n z}{dt^n} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) \frac{dz}{dt} = b(t)$$

und die anderen $n-1$ Gleichungen werden wir wählen, um ein einfaches Gleichungensystem zu erhalten.

Die Produktregel ergibt

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \right\} = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{du_j}{dt} + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{dc_j}{dt}$$

Für unsere erste Gleichung wählen wir

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} u_j(t) \frac{dc_j}{dt}(t) \equiv 0}$$

Dann haben wir

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{j=1}^{h} c_j(t) \frac{du_j}{dt}$$

Wir wiederholen die Prozedur für die ersten $n-1$ Ableitungen von $z(t)$ und erhalten

$$\frac{d^l z}{dt^l} = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) \frac{d^l u_j}{dt^l}$$

$l = 0, 1, \cdots, n-1$ mit den $n-1$ Bedingungen (d.h. diese sind unsere Wahl)

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{d^{l-1} u_j}{dt^{l-1}}(t) \, \frac{dc_j}{dt}(t) = 0,} \qquad l = 1, \cdots, n-1, \qquad \text{wobei } \tfrac{d^0 x}{dt^0} \equiv x.$$

Dann lautet die $n$te Ableitung

$$\frac{d^n z}{dt^n} = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j(t) \frac{d^{n-1} u_j}{dt^{n-1}} \right\} = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) \frac{d^n u_j}{dt^n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{dc_j}{dt} \, \frac{d^{n-1} u_j}{dt^{n-1}}, \qquad \text{Produktregel.}$$

Aber $z(t)$ ist inhomogene Lösung.

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{d^n z}{dt^n} + \sum_{l=1}^{n-1} a_l \frac{d^l z}{dt^l} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} c_j(t) \, \frac{d^n u_j}{dt^n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{dc_j}{dt} \, \frac{d^{n-1} u_j}{dt^{n-1}} \right) + \sum_{l=0}^{n-1} a_l \left(\sum_{j=1}^{n} c_j \, \frac{d^l u_j}{dt^l} \right) \\ &= (\sum_{j=1}^{n} \frac{dc_j}{dt}(t) \frac{d^{n-1} u_j}{dt^{n-1}} + \sum_{j=1}^{n} 0 = 0 \qquad \text{homogene Lösungen!} \end{aligned}$$

d.h.

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{d^{n-1}u_j}{dt^{n-1}} \frac{dc_j}{dt} = b(t)}$$

Wir haben n Bedingungen für die unbekannte Ableitung $\frac{dc_1}{dt}, \ldots, \frac{d_n}{dt}$, nämlich

$$\begin{bmatrix} u_1(t) & \cdots & u_n(t) \\ \frac{du_1}{dt}(t) & \cdots & \frac{du_n}{dt}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{n-1}u_j}{dt^{n-1}}(t) & \cdots & \frac{d^{n-1}u_n}{dt^{n-1}}(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dc_1}{dt} \\ \frac{dc_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dc_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

mit der Wronski Matrix $U(t) = [\underline{u_1}(t)| \cdots | \underline{u_n}(t)]$ hier.

Die Lösung lautet

$$\boxed{\frac{dc_j}{dt} = \frac{b(t)w_j(t)}{w(t)},} \qquad j = 1, \cdots, n,$$

wegen Cramers Regel, wobei $w(t) = \det U(t) = \det[\underline{u_1}(t)| \cdots | \underline{u_n}(t)]$ (die Wronski-Determinante) und

$$w_j(t) = \det U_j(t) \leftarrow \text{ mit } \underline{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad U(t) \quad \text{statt} \quad u_j(t), \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

Daher lautet die gesuchte inhomogene Lösung

$$\boxed{z(t) = \sum_{j=1}^{n} u_j(t) \int^t \frac{b(s)w_j(s)}{w(s)}\, ds} \qquad \text{unbestimmtes Integral.}$$

Hinweis: Es ist sehr aufwändig, Determinanten auszuwerten — besser ist es, das lineare System direkt zu lösen.

Kapitel 18

Phasenportrait

Literatur: Aulbach: S. 113 - 115, Walter: S. 154-158

Betrachte eine DGL

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Eine stetig differenzierbare Funktion $x : (\gamma, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ die der Gleichung

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t))$$

für alle $t \in (\gamma, \delta)$, heißt Lösung.

Der Graph dieser Lösung, d.h. die Menge

$$\{(t, x(t)) : \ t \in (\gamma, \delta)\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

heißt Lösungskurve.

Die Projektion der Lösungskurve auf den Zustandsraum $\mathbb{R}^d$, d.h. die Bildmenge

$$\{x(t) : t \in (\gamma, \delta)\} \subset \mathbb{R}^d,$$

heißt Trajektorie der Lösung.

Beispiel 1 $\boxed{\frac{dx}{dt} = -\lambda x}$ in $\mathbb{R}^1$ hat Lösung: $x(t) = x_0 e^{-t}, \quad \forall t \in (-\infty, \infty)$ und Lösungskurve:

$$\left\{(t, x_o e^{-t}) : \ t \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Die Pfeile zeigen die Richtungen zunehmender Zeit in dem Bild der Trajektorieen.

Die Trajektorie lautet

$$\left\{x_0 e^{-t} : \ t \in \mathbb{R}\right\}. = \begin{cases} (0, \infty), & \text{falls } x_0 > 0 \\ \{0\}, & \text{falls } x_0 = 0 \\ (-\infty, 0), & \text{falls } x_0 < 0 \end{cases}$$

Beispiel 2 $\boxed{\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x}$ oder als vektorwetrige DGL in $\mathbb{R}^2$

$$\frac{dx}{dt} = Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x,$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind $\pm\imath$.

$\Longrightarrow$ Lösung $\boxed{x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t, \quad y(t) = -x_0 \sin t + y_0 \cos t}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

$$\Longrightarrow \quad x(t)^2 + y(t)^2 \equiv x_0^2 + y_0^2 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

Die Trajektorie ist der Kreis in $\mathbb{R}^2$ (Variablen (x, y)) mit Zentrum $x = y = 0$ und Radius $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

Die Lösungskurve liegt auf dem Zylinder in $\mathbb{R}^3$ (Variablen (t, x, y)) mit diesem Kreis als t-Schnitte

BILD

Ein Bild typischer Trajektorien heißt Phasenportrait

Die Phasenvariablen in der (Physik/Mechanik sind $x = x(t)$ und $y = \frac{dx}{dt}(t)$.

WIr können die Trajektorien im Beispiel 2 direkt finden. Schreibe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{-x}{y}, \qquad x \neq, 0, y \neq 0$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}}$ d.h. eine DGL mit getrennten Variablen !

$\Longrightarrow$ $2ydy = -2xdx$ $\Longrightarrow$ $d(y^2) = -d(x^2)$ $\Longrightarrow$ $y^2 = -x^2 +$ Konstante

$\Longrightarrow$ Lösungskurve $x^2 + y^2 = K^2$, weil die Konstante ≥ 0 ist.

Aber wir erhalten keine Informationen über die Richtung mit zunehmender Zeit.

18.1 Phasenportrait für 2-dimensionale lineare Systeme

Betrachte das System

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \qquad \frac{d}{dt} = cx + dy,$$

oder die ¨aquivalente vektorwerzige DGL

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & b \end{bmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

wobei die Koeffizienten a, b, c, d Konstanten sind.

Wir können die t Variablen eliminieren

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{cx + dy}{ax + uy}$$

und erhalten eine homogene DGL

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c + u\frac{y}{x}}{a + w\frac{x}{y}}.$$

Definiere $w = w(x) = y(x)/x$

$$\Longrightarrow y(x) = x\, w(x), \qquad \tfrac{dy}{dx} = w + x\frac{w}{dx}.$$

Dann erhalten wir eine DGL mit getrennten Variablen

$$x\frac{dw}{dx} = \frac{c + dw}{a + uw} - w,$$

die im Prinzip explizit lösbar ist.

Aber es gibt viele verschiedene Fälle, die von der Form der Eigenwerte der Matrix A abhängen.

$$\begin{aligned} \det[A - \lambda I] &= \det\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - \underbrace{(a + d)}_{=s \text{ Spur von } A} + \underbrace{(ad - bc)}_{=D \text{ Determinante } A} \\ &= \lambda^2 - s\lambda + D \end{aligned}$$

Die Eigenwerte lauten

$$\lambda = \frac{1}{2}(s \pm \sqrt{s - 4D^2}$$

Wir werden nur den nichtdegenerierten Fall mit $D = \det A \neq 0$ betrachten,d.h.mit

A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\underline{x} = \underline{0}$ ist die einzige Ruhelage $\Leftrightarrow$ kein Eigenwert $\lambda = 0$.

Es gibt 3 kanonische Fälle (eventuell nach einer Koordinatentransformation)

(I) A diagonalisierbar λ_1, λ_2 sind reellwertig und

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

mit

$$\begin{cases} (i) & \lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 \\ (ii) & 0 < \lambda_2 \leq \lambda_1 \quad (\lambda_1 = \lambda_2 \text{ erlaubt!}) \\ (iii) & \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \end{cases}$$

(II) A <u>diagonalisierbar</u> $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + \imath\beta$ λ_1, λ_2 sind (<u>komplexwertig</u>), d.h. mit $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + \imath\beta$, wobei $\beta \neq 0$, und

$$P^{-1}AP = \wedge = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

(III) A <u>nicht diagonalisierbar</u> $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ sind reelwertig und gleich, und

$$P^{-1}AP = \wedge = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

mit

$$\begin{cases} (i) & \lambda < 0 \\ (ii) & \lambda > 0 \end{cases}$$

Wir werden die Lösungen der transformierten DGLen

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \Lambda \underline{x}$$

systematisch untersuchen. Man soll dann zurück in die ursprünglichen Koordinaten transformieren.

<u>Fall (I):</u> λ_1, λ_2 <u>reellwertig</u>

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 x, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y$$

mit Lösung

$$x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t}, \qquad y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t}$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\lambda_2} = \left(e^{\lambda_1 t}\right)^{\lambda_2} = \left(e^{\lambda_2 t}\right)^{\lambda_1} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\lambda_1}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y = y_0 x_0^{-\lambda_2/\lambda_1} \, x^{\lambda_2/\lambda_1}}$$

<u>oder</u> direkt durch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{y}{x}.$$

Es gibt drei Möglichkeiten

(1) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_2/\lambda_1 \in (0,1)$

(2) $\quad 0 < \lambda_2 < \lambda_1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_2/\lambda_1 \in (0,1)$

In beiden Teilfällen gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} y_0 \, x^{-\lambda_2/\lambda_1} \, x^{\lambda_2/\lambda_1 - 1} \to \pm\infty \qquad \text{für} \quad x \to 0$$

$$\text{oder} \qquad \frac{dx}{dy} \to 0 \quad \text{für } x \to 0$$

Die Trajektorien sind dann der Form

BILD

(i) $\quad \lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 \qquad$ Dann gilt $x(t)$, $y(t) \to 0$ für $t \to \infty$ und die Phasenportrait sind

BILD

(ii) $\quad 0 < \lambda_2 < \lambda_1 \qquad x(t), y(t) \to 0$ für $t \to -\infty$

BILD

Der Ursprung $\underline{0}$ hier – eine Ruhelage – heißt Knotenpunkt.

Bemerkung: Die Trajektorien schneiden sich in der Ruhelage. Dies ist kein Widerspruch der Eindeutigkeit der Lösungen. Die Lösungeskurven schneiden sich nicht – sie streben gegen die Ruhelage als $t \to +\infty$ oder $-\infty$ hier, aber nie die Ruhelagen in endlicher Zeit erreichen!

(iii) $\quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2 \qquad$ Dann gilt

$$x(t) \to 0 \quad \text{für } t \to +\infty, \qquad y(t) \to 0 \quad \text{für } t \to -\infty.$$

BILD

Fall (II): komplexwertige $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda + \imath\beta$ mit $\beta > 0$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta y, \qquad \frac{dy}{dt} = -\beta x + \alpha y$$

mit Lösung

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t} \cos \beta t + y_0 e^{\alpha t} \sin \beta t, \qquad y(t) = -x_0 e^{\alpha t} \cos \beta t + y_0 e^{\alpha t} \sin \beta t \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

und Lösungeskurve

$$x(t)^2 + y(t)^2 = e^{2\alpha t} \left(x_0^2 + y_0^2 \right)$$

d.h. konstanter Rotation in die Uhrzeigerrichtung (falls $\beta > 0$) mit Radius $r(t) = e^{\alpha t} r_0$

BILD

Die Ruhelage $\underline{0}$ heißt Strudelpunkt $\underline{0}$ heißt Zentrum oder Wirbelpunkt. ?????

Fall (III): nichtdiagonalisierbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x + y, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda_y$$

mit Lösung

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} + y_0 t e^{\lambda t}, \qquad y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{y}{y_0} = e^{\lambda t}, \qquad t = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{y}{y_0} \right) \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{x_0}{y_0} y + y_0 \frac{y}{y_0} \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{y}{y_0} \right)$$

d.h. mit Lösungeskurve

$$\boxed{x = \frac{x_0}{y_0} y + \frac{1}{\lambda} y \ln \left(\frac{y}{y_0} \right)}$$

$$\Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x_0}{y_0} + \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{y}{y_0} \right) + \frac{1}{\lambda} y \frac{y_0}{y} \to \pm\infty \qquad \text{für } y \to 0$$

oder

$$\frac{dy}{dx} \to 0 \qquad \text{für } y \to 0 \qquad x - \text{Achse} \quad \equiv \quad \text{Tangente}$$

BILD

Die Ruhelage $\underline{0}$ heißt auch Knotenpunkt hier.

Kapitel 19

Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern

Literatur: Aulbach: 7.1 - 7.3, Walter: 12 - 13

Betrachte eine AWA

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \alpha), \quad x(t_0) = x_0, \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

wobei die Vektorfeldfunktion f auch von einem (vektorwertigen) Parameter $\alpha \in \mathbb{R}^k$ abhängt.

Für festes $\alpha = \alpha_0$ erhalten wir von dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz eine eindeutige Lösung

$$x(t) = x(t, t_0, x_0, \alpha_0).$$

Von der Definition einer Lösung ist $x(t)$ stetig differenzierbar in t.

Frage: *Wie hängt $x(t, t_0, x_0, \alpha_0)$ von t_0, x_0 und α_0 ab?*

Beispiel: Betrachte die AWA

$$\frac{dx}{dt} = 2\alpha t x, \quad x(t_0) = x_0, \qquad \alpha, x \in \mathbb{R}^1,$$

mit der expliziten Lösung

$$x() = x_0 e^{\alpha(t^2 - t_0^2)}.$$

Offensichtlich ist die Funktion $(t, t_0, x_0, \alpha) \longrightarrow x_0\, e^{\alpha(t^2 - t_0^2)}$ auch stetig differenzierbar in t_0, x_0 und α_0.

Wir wollen dieses Ergebnis in dem allgemeinen Fall beweisen, erstens Stetigkeit, dann Differenzierbarkeit. Dafür brauchen wir den folgenden Hilfssatz:

Satz 14 *(Ungleichung von Gronwall) Sei $x : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, und es gelte*

$$x(t) \leq c + \int_0^t b(s) x(s)\, ds, \qquad t \in [0, T],$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und $b : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und nichtnegativ ist. Dann ist

$$x(t) \leq c\, e^{\int_0^t b(s)\, ds}, \qquad t \in [0, T].$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\psi : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi_\varepsilon(t) := (c+\varepsilon)e^{\int_0^b (s)\,ds}, \qquad t \in [0,T],$$

<u>d.h</u> ψ löst die AWA

$$\frac{d\psi_\varepsilon}{dt} = b(t)\psi_\varepsilon \qquad \text{mit } \psi_\varepsilon(0) = c+\varepsilon.$$

Es gilt $x(0) \le c < c+\varepsilon = \psi_2(0)$, <u>d.h.</u> $x(0) < \psi_\varepsilon(0)$.

<u>Annahme:</u> es existiere $\tau \in (0,T]$ mit

$$x(\tau) = \psi_\varepsilon(\tau) \quad \underline{\text{und}} \quad x(t) < \psi_\varepsilon(t) \text{ für alle } t \in [0,\tau].$$

Dann ist

$$x(\tau) \le c + \int_0^\tau b(s)\,ds < c+\varepsilon+\int_0^\tau b(s)\psi_\varepsilon(s)\,ds = \psi_\varepsilon(\tau),$$

was ein Widerspruch ist.

Also gilt $x(t) \le \psi_\varepsilon(t)$ für alle $t \in [0,T]$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. ∎

Jetzt werden wir die stetige Abhängigkeit von Anfangswerten beweisen (DG ohne Parameter)

Satz 15 *Sei $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ stetig und genüge f einer Lipschitz-Bedingung bzg. x mit Lipschitz-Konstante L gleichmäßig in $t \in [0,T]$. Dann gilt*

$$|x(t,t_0,\tilde{x_0} - x(t,t_0,x_0)| \le |\tilde{x_0} - x_0|\, e^{L(t-t_0)}$$

für alle $t \in [t_0,T]$, <u>d.h.</u> $x_0 \longrightarrow x(t;t_0,x_0)$ ist Lipschitz-stetig.

Beweis:: Die Lösungen $\tilde{x_0}(t) = x(t;t_0,\tilde{x_0})$ und $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ genügen den Integralgleichungen

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x_0} + \int_{t_0}^t f(s,\tilde{x}(s))\,ds, \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s,x(s))\,ds$$

für alle $t \in [t_0,T]$. Es folgt

$$\begin{aligned}
|\tilde{x}(t) - x(t)| &= \left|\tilde{x_0} - x_0 + \int_{t_0}^t \{f(s,\tilde{x}(s)) - f(s,x(s))\}\,ds\right| \\
&\le |\tilde{x_0} - x_0| + \int_{t_0}^t |f(s,\tilde{x}(s)) - f(s,x(s))|\,ds \\
&\le \underbrace{|\tilde{x_0} - x_0|}_{=c} + \int_{t_0}^t \underbrace{L\,|(\tilde{x}(s)) - x(s))|}_{\text{Lipschitz}}\,ds
\end{aligned}$$

und dann wegen der Gronwall-Ungleichung gilt

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \le |\tilde{x_0} - x_0|\, e^{\int_{t_0}^t L\,ds} = |\tilde{x_0} - x_0|\, e^{L(t-t_0)}.$$

∎

Der Beweis der stetigen Abhängigkeit von (t_0, x_0) ist ein bißchen kompliziereter. Wir haben jetzt

$$\begin{aligned} x(t, \tilde{t_0}, \tilde{x_0}) - x(t, t_0, x_0) &= \tilde{x_0} - x_0 + \int_{t_0}^{t} \left\{ f(s, x(s; \tilde{t_0}, \tilde{x_0}) - f(s, x(s, t_0, x_0)) \right\} ds \\ &\quad + \int_{\tilde{t_0}}^{t_0} f(s, x(s, \tilde{t_0}, \tilde{x_0}))\, ds \end{aligned}$$

Wir können das zweite Integral folgenderweise abschätzen

$$\left| \int_{t_0}^{\tilde{t_0}} f(s, \tilde{x}(s))\, ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{\tilde{t_0}} |f(s, \tilde{x}(s))|\, ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{\tilde{t_0}} M\, ds \right| \leq M \left| t_0 - \tilde{t_0} \right|$$

wobei $M := \max\limits_{t \in [0,T], |x| \leq R} |f(t, x)|$ mit $R \gg 0$, so dass alle Lösungen in dem Balle $|x| \leq R$ bleiben.

Dann erhalten wir

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leq |\tilde{x_0} - x_0| + M \left| \tilde{t_0} - t_0 \right| + \int_{t_0}^{t} L\, |\tilde{x}(s) - x(s)|\, ds.$$

und die Gronwall-Ungleichung ergibt

$$\left| x(t, \tilde{t_0}, \tilde{x_0}) - x(t, t_0, x_0) \right| \leq \left\{ |\tilde{x_0} - x_0| + M \left| \tilde{t_0} - t_0 \right| \right\} e^{L(t - t_0)} \qquad \text{für } t \in [t_0, T].$$

19.1 Stetige Abhängigkeit von Parametern

Sei $\mathcal{A}$ eine kompakte Teilemenge von $\mathbb{R}^k$. In der AWA in $\mathbb{R}^d$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \alpha), \qquad x(t_0) = x_0,$$

bleibt der Parameter $\alpha \in \mathcal{A}$ konstant.

EE-Sätze $\Longrightarrow$ es gibt eine eindeutige Lösung $x(t) = x(t, t_0, x_0, \alpha)$.

Satz 16 *Die Lösung $x(t, t_0, x_0, \alpha)$ hängt stetig von α ab, wenn f stetig bzgl. α ist.*

Wir werden zwei Beweise unter genaueren Voraussetzungen betrachten.

1. Beweis Setze voraus, dass

a) $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ist stetig

b) f genügt einer Lipschitz-Bedingung bzg. x gleichmäßig in $(t, \alpha) \in [0, T] \times \mathcal{A}$. (Lipschitz-Konstante $= L$)

Wir müsen den Beweis des Picard-Lindelöf- Satzes ein bißchen verändern.

Sei $\mathcal{C} := C([0, T] \times \mathcal{A}, \mathbb{R}^d)$ der Banach-Raum stetiger Funktionen $x : [0, T] \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ mit der Norm

$$\|x\|_{\exp} = \max_{t \in [0,T], \alpha \in \mathcal{A}} \left\{ |x(t, \alpha)| e^{-\frac{1}{2} L |t - t_0|} \right\}$$

wobein L der Lipschitz-Konstante von f ist.

Für jedes $x \in \mathcal{C}$ definiere $y = Tx$ durch

$$y(t,\alpha) = (Tx)(t,\alpha) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s,\alpha), \alpha)\, ds$$

$\Longrightarrow$ $y(t,\alpha)$ ist stetig bzgl. t und α d.h $y \in \mathcal{C}$ und $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$

Dann wie vorher (d.h. im Beweis des EE-Satzes) zeige, dass T eine Kontraktionsabbildung auf $\mathcal{C}$ mit Kontraktionskonstante $\frac{1}{2}$ ist.

$\Longrightarrow$ T besitzt einen eindeutigen Fixpunkt

$$\overline{x}(t,\alpha) = (T\overline{x})(t,\alpha) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \overline{x}(s,\alpha), \alpha)\, ds,$$

der die Lösung der obigen AWA ist.

$$\Longrightarrow \quad x(t, t_0, x_0, \alpha) \equiv \overline{x}(t,\alpha) \quad \text{stetig bzgl } t \text{ und } \alpha \text{ ist.}$$

2. Beweis: Setze voraus, dass

a) $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times A \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ist stetig

b) f genügt einer Lipsschitz-Bedingung bzgl. x und α mit Lispschitz-Konstante L gleichmäßig in $t \in [0,T]$

Betrachte die neue AWA in $\mathbb{R}^{d+k}$

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = 0$$

mit

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = \alpha_0 \qquad \Longrightarrow y(t) \equiv \alpha_0!$$

Definiere $z = (x,y) \in \mathbb{R}^{d+tk}$ und $F(t,z) = (f(t,x,y),0)$.

Die obige AWA ist äquivalent der AWA in $\mathbb{R}^{d+k}$

$$\frac{dz}{dt} = F(t,z), \qquad z(t_0) = z_0,$$

Die Funktion F ist stetig und genügt einer Lipschitz-Bedingung bzg. z mit Lipschitz-Konstante L gleichmäßig in $t \in [0,T]$ $\Longrightarrow$

die Funktion $(t, t_0, z_0) \longrightarrow z(t, t_0, z_0)$ ist stetig (tatsächlich Lipschitz-stetig!) bzg. (t_0, z_0)

Aber

$$z(t, t_0, z_o) = (x(t; t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0) \quad \text{weil} \quad y(t) \equiv \lambda_0 \quad \text{hier}$$

$\Longrightarrow$ die Abbildung $(t, t_0, x_0, \alpha_0) \longrightarrow x(t; t_0, x_0, \alpha_0)$ ist stetig (tatsächlich, Lipschitz-stetig !)

Kapitel 20

Differenzierbare Abhängigkeit

Literatur: Aulbach 7.3

Die Lösungsabbildung $(t, t_0, x_0, \alpha_0) \to x(t, t_0, x_0, \alpha_0)$ einer parameterisierten AWA

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \alpha), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ \alpha \in \mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$$

ist tatsächlich stetig differenzierbar bzg. aller Variablen, wenn die Vektorfeldfunktion f 1-mal stetig differenzierbar ist.

Hier werden wir nur den skalaren Fall (x,$\alpha \in \mathbb{R}^1$) betrachten und die Ergebnisse nur formal herleiten - siehe Aulbach 7.3. für die echten Beweise.

Wir fangen an mit der Integralgleichungsdarstellung der AWA, d.h.

$$x(t, t_0, x_0, \alpha_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x(s, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0\right)\, ds.$$

1. Fall Ableitung nach x_0 $\boxed{\dfrac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0, \alpha_0)}$

Die rechte Seite der IG enthält x_0 in zwei Stellen,d.h.

$$\underbrace{x_0}_{\uparrow} + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s, t_0, \underbrace{x_0}_{\uparrow}, \alpha_0), \alpha_0)\, ds$$

Differenziere nach x_0 mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0, \alpha_0) = 1 + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0)\, \frac{\partial x}{\partial x_0}(s, t_0, x_0, \alpha_0)\, ds$$

Dann genügt $u(t) := \dfrac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0, \alpha_0)$ der AWA

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0)\, u, \qquad u(t_0) = 1.$$

2. Fall Ableitung nach t_0 $\boxed{\dfrac{\partial x}{\partial t_0}(t, t_0, x_0, \alpha_0)}$

Die rechte Seite der IG hängt auch 2 mal von t_0 ab – durch die Integrandfunktion wie oben und durch den Randpunkt des Integrationsintervalls,

$$x_0 + \int\limits_{\underbrace{t_0}_{\uparrow}}^{t} f(s, x(s, \underbrace{t_0}_{\uparrow}, x_0, \alpha_0), \alpha_0)\, ds$$

Differenziation nach t_0 ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial t_0}(t, t_0, x_0, \alpha_0) &= \frac{\partial}{\partial t_0}\left\{ \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0)\, ds \right\} \\
&= -f(s, x(s, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0)\Big|_{s=t_0} \qquad \text{Minus: \underline{unterer} Randpunkt!} \\
&+ \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0)\, \frac{\partial x}{\partial t_0}(s, x(s, t_0, x_0, \alpha_0)\, ds \\
&= -f(t_0, x_0, \alpha_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, t_0, x_0, \alpha_0)\, \frac{\partial x}{\partial t_0}(s, t_0, x_0, \alpha_0)\, ds
\end{aligned}$$

weil $x(t_0, t_0, x_0, \alpha_0) = x(t_0) = x_0$! d.h. $v(t) := \dfrac{\partial x}{\partial t_0}(t, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0)$ genügt der AWA

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0)\, v, \qquad v(t_0) = -f(t_0, x_0, \alpha_0).$$

3. Fall Ableitung nach α_0 : $\boxed{\dfrac{\partial x}{\partial \alpha_0}(t; t_0, x_0, \alpha_0)}$

Die rechte Seite der IG enthält α_0 2 mal innerhalb der Integrandfunktion

$$x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s, t_0, x_0, \underbrace{\alpha_0}_{\uparrow}), \underbrace{\alpha_0}_{\uparrow})\, ds.$$

Differenziere nach α_0 :

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_0}(t, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0) =$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0) \frac{\partial x}{\partial \alpha_0}(s, t_0, x_0, \alpha_0) + \frac{\partial f}{\partial \alpha_0}(s, x(s, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0) \right) ds$$

mit der Kettenregel nochmal. Daher genügt $w(t) := \frac{\partial x}{\partial \alpha_0}(t, x(t, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0)$ der AWA

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0)\, w + \frac{\partial f}{\partial \alpha_0}(t, x(t, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0), \qquad w(t_0) = 0.$$

Bemerkungen: Die drei DGLen in den obigen AWA für die Partiellen Ableitungen der Lösung $x(t, t_0, x_0, \alpha_0)$ heißen Variationsgleichungen. Sie haben den selben Hauptteil,

$$A(t, t_0, x_0, \alpha_0) := \frac{df}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0, \alpha_0), \alpha_0),$$

der von der Lösung $x(t, t_0, x_0, \alpha_0)$ abhängt. In dem vektorwertigen Fall ist A die $d \times d$ Jacobi Matrix:

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right].$$

Beispiel $\boxed{\frac{dx}{dt} = 2\alpha t x}$ mit Lösung $x(t, t_0, x_0, \alpha_0) = x_0\, e^{\alpha\left(t^2 - t_0^2\right)}$

$$\Longrightarrow \qquad f(t, x, \alpha) = 2\alpha t x, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \alpha) = 2\alpha t, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, \alpha) = 2tx.$$

Die Variationsgleichungen hier lauten

1)

$$\frac{du}{dt} = 2\alpha_0 t\, u, \quad u(t_0) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad u(t) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0, \alpha_0) = e^{\alpha_0(t^2 - t_0^2)}$$

2)

$$\frac{dv}{dt} = 2\alpha_0 t\, v, \quad u(t_0) = -2\alpha_0 t_0 x_0, \qquad \Longrightarrow \qquad v(t) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0, \alpha_0) = -2\alpha_0 t_0 x_0 e^{\alpha_0(t^2 - t_0^2)}$$

3) benutze die obigen expliziten Lösung statt $x(t; t_0, x_0, \alpha_0)$ in

$$\frac{dw}{dt} = 2\alpha_0 t\, w + 2t\, x(t; t_0, x_0, \alpha_0), \quad w(t_0) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad w(t) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0, \alpha_0) = t^2\, x_0 e^{\alpha(t^2 - t_0^2)}$$

20.1 Stabilitätsbegriffe

Literatur: Aulbach 7.4, Baumeister Kapitel 5

Die Variationsgleichungenbeschreiben die Beziehung zwischen einer Lösung $x(t, t_0, x_0)$ einer AWA

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

und den Lösungen $x(t, \tilde{t_0}, \tilde{x_0})$ mit benachbarten Anfangswerten $x(\tilde{t_0}) = \tilde{x_0}$, d.h. mit $(\tilde{t_0}, \tilde{x_0}) \approx (t_0, x_0)$.

Die Koeffizientenmatrix dieser Variationsgleichung enthält die Lösung $x(t, t_0, x_0)$, die leider meistens nicht explizit bekannt ist.

Aber es gibt wichtige Sonderfälle, z.B. wenn die Lösung $x(t, t_0, x_0)$ eine Ruhelage der DGL ist, d.h.

$$x(t, t_0, \bar{x}_0) \equiv \bar{x}_0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(t, \bar{x}_0) = 0 \qquad \text{für alle } t.$$

Dann ist die Koeffizientenmatrix

$$A(t) := A(t, t_0, \bar{x}_0) \equiv \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \bar{x}_0)\right]$$

explizit bekannt und wir können (im Prinzip !) die <u>linearen</u> Variationsgleichungen lösen

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \qquad (y = u \text{ oder } v).$$

In diesem Fall können wir viele Informationen über das Verhalten der Lösungen in der Nähe der Ruhelage direkt von der ursprünglichen DGL auch erhalten. Betrachte die AWA

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad \Longrightarrow \underline{\text{Lösung}} \quad x(t) = x(t, t_0, x_0).$$

Wir haben schon bewiesen: die Abbildung $(t, t_0, x_0) \to x(t, t_0, x_0)$ ist <u>stetig</u>

$\Longrightarrow$ die Abbildung $x_0 \to x(t, t_0, x_0)$ ist <u>stetig</u> für festes t_0 <u>gleichmäßig</u> in $t \in [t_0, t_0 + T]$, wobei $T > 0$ endlich (sonst beliebig) ist, <u>d.h.</u> für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\delta = \delta(\varepsilon, t_0, \bar{x}_0, T) > 0$ mit

$$|x_0 - \bar{x}_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, \bar{x}_0)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad t \in [t_0, t_0 + t].$$

Betrachte jetzt eine Ruhelage $\bar{x}_0$ der DGL

$$x(t, t_0, \bar{x}_0) \equiv \bar{x}_0, \qquad \forall t \geq t_0$$

Dann gilt

$$|x_0 - \bar{x}_0| < \delta \Longrightarrow \quad |x(t, t_0, x_0) - \bar{x}_0| < \varepsilon \quad \text{für} \;\; t \in [t_0, t_0 + T].$$

d.h. wir bleiben in der Nähe der Ruhelage(für endliche Zeit), wenn wir nah genug angangen !

<u>Beispiel</u> $\boxed{\frac{dx}{dt} = x, \ x(0) = x_0}$ <u>autonom</u> (nimm $t_0 = 0$) <u>Lösung</u> $x(t, x_0) = x_0 e^t$, <u>Ruhelage</u> $\bar{x}_0 \equiv 0$.

$$\begin{aligned} |x(t, x_0) - \bar{x}_0| = \left|x_0 e^t - 0\right| = |x_0| \; e^t \qquad (t \geq 0) & \\ & \leq \; |x_0| \; e^T \qquad t \in [0, T] \\ & < \; \varepsilon \qquad \text{für} t \in [0, T] \end{aligned}$$

wenn $|x_0| < \delta = \varepsilon e^{-T}$.

<u>d.h.</u> $\delta = \delta(\varepsilon, \bar{x}_0, T) = \varepsilon e^{-T}$ hier

BILD

<u>Aber</u> $\delta(\varepsilon, \bar{x}_0, T) = \varepsilon e^{-T} \to 0$ für $T \to \infty \quad \Longrightarrow \quad$ <u>keine</u> Lösung mit $x_0 \neq 0$ bleibt in einer gegebenen Umgebung der Ruhelage für <u>alle</u> Zeit $t \geq 0$!

Dieses Beispiel ist der „worst case“ Das Verhalten kann viel besser sein.

Beispiel $\boxed{\frac{dx}{dt} \equiv 0,\ x(t_0) = x_0}$ Lösung $x(t, x_0) \equiv x_0$ — (alle Punkte sind Ruhelagen !)

Betrachte die bestimmte Ruhelage $\bar{x_0} \equiv 0$. Dann gilt

$$|x(t, x_0) - \bar{x}_0| \equiv |x_0 - \bar{x}_0| \equiv |x_0| \text{ für alle } t \geq 0.$$

Definiere $\delta(\varepsilon) \equiv \varepsilon > 0$. Dann haben wir

$$|x_0 - \bar{x}_0)| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x(t, x_0) - \bar{x}_0| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

d.h. wir bleiben immer in der Nähe der Ruhelage.

Diese Eigenschaft heißt Stabilität der Ruhelage.

Das Verhalten kann auch besser sein.

Beispiel $\boxed{\frac{dx}{dt} = -x,\ x(0) = x_0}$ Lösung $x(t, x - 0) = x_0 e^{-t}$, Ruhelage $\bar{x}_0 = 0$ (eindeutig!)

Hier gilt

$$|x(t, x_0) - \bar{x}_0| = \left|x_0 e^{-t} - 0\right| = |x_0|\, e^{-t} \leq |x_0| \qquad \forall t \geq 0$$

$\Longrightarrow$ Stabiltät mit $\delta(\varepsilon) \equiv \varepsilon$ wie oben. Aber es gilt auch

$$|x(t, x_0) - \bar{x}_0| = |x_0|\, e^{-t} \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \longrightarrow \infty$$

und alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

Diese Eigenschaft heißt Attraktivität der Ruhelage.

Zusammen haben wir de folgende Definition

$$\boxed{\text{Stabilität} + \text{Attraktivität} \equiv \text{asymptotische Stabilität}}$$

Kapitel 21

Stabilität von Ruhelagen

Literatur: Aulbach 7.4, Baumeister 5.1 und 5.2

Wir betrachten eine AWA

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

und setzen voraus:

1) eine eindeutige Lösung $x(t, t_0, x_0)$ existiert für alle $t \geq t_0$ und jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d$
2) $\bar{x}$ ist eine Ruhelage, d.h.

$$f(t, \bar{x}) \equiv 0, \qquad x(t, t_0, \bar{x}) \equiv \bar{x} \quad \text{für alle } t \geq t_0 \in \mathbb{R}.$$

Definition : Stabilität einer Ruhelage Eine Ruhelage $\bar{x}$ heißt stabil, wenn gilt

$\forall \varepsilon > 0$ und $t_0 \in \mathbb{R}, \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ mit

$$|x_0 - \bar{x}| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |x(t, t_0, x_0) - \bar{x}| < \varepsilon \qquad \text{für alle } t \geq t_0.$$

Andernfalls heißt die Ruhelage $\bar{x}$ instabil!

Definition : Attraktivität einer Ruhelage Eine Ruhelage $\bar{x}$ heißt attraktiv, wenn gilt

$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \exists \nu = \nu(t_0) > 0$ mit

$$|x_0 - \bar{x}| < \nu \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} x(t, t_0, x_0) = \bar{x}.$$

Die Menge $\mathcal{U}(t_0) := \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^d : \lim_{t\to\infty} x(t, t_0, x_0) = \bar{x} \right\}$ heißt Einzugsbereich der Ruhelage $\bar{x}$ (zu der Anfangszeit t_0).

Beispiel: $\boxed{\frac{dx}{dt} = x(1-x)}$ autonom – nimm $t_0 = 0$!

Die Ruhelage $\bar{x} = 0$ ist instabil, aber die Ruhelage $\bar{x} = 1$ ist attraktiv mit Einzugsbereich $\mathcal{U} = (0, \infty)$.

Definition: Die Ruhelage $\bar{x}$ heißt asymptotisch stabil, wenn sie stabil und attraktiv ist.

Die Begriffe Stabilität und Attraktivität sind im Allgemeinen unabhängig (Sonderfälle später!).

Beispiel: Stabilität ohne Attraktivität

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} x \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Die Ruhelage $\bar{x} = 0$ ist ein Zentrum $\implies$ stabil mit $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, aber nicht attraktiv, weil

$$x^2(t) + y^2(t) \equiv x_0^2 + y_0^2 \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Beispiel: Attraktivität ohne Stabilität (siehe Aulbach Seiten 303-4) Ein in Polarkoordinaten gegebenes ebenes autonomes System besteht aus zwei voneinander unabhängigen DGLen.

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r), \qquad \frac{d\theta}{dt} = \sin^2\frac{\theta}{2}$$

Die Explizite Lösung lautet ($t_0 = 0$, autonom!)

$$r(t, r_0) = \frac{r_0}{r_0 + (1-r_0)e^{-t}}, \qquad \theta(t, \theta_0) = 2\arctan\left(\frac{2\sin\theta_0}{2\cos\theta_0 - t\sin\theta_0 + 2}\right).$$

Sehr nett! Aber wir können auch viele nützliche Informationen direkt von den DGLen ablesen

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = r(1-r)} \qquad \boxed{\frac{d\theta}{dt} = \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

Ruhelagen: $r = 0,\ 1$ und $\theta = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \cdots,\ 2k\pi,\ \cdots$ periodisch : alle gleich!

Auch gilt $\dfrac{d\theta}{dt} = \sin^2\dfrac{\theta}{2} > 0$ für $0 < \theta < 2\pi$ $\implies$ Rotation in die Gegenuhrzeigerrichtung mit Maximumrotationsgeschwindigkeit.

$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\max} = 1 \qquad \text{für } \theta = \pi$$

In (x, y) - Koordinaten besitzt das System zwei Ruhelagen

1 $\bar{x} = (0,0) \iff \bar{r} = 0$ Ursprung !

2) $\bar{x} = (1,0) \iff \bar{r} = 1, \bar{\theta} = 0$

Auch sind die folgenden Kurven invariant, d.h. Lösungen, die auf der Kurve anfangen, bleiben immer auf der Kurve.

3) Einheitskreis $r \equiv 1$ oder $x^2 + y^2 \equiv 1$

4) positive x-Achse: $x > 0$ oder $r > 0$ mit $\bar{\theta} = 0$.

Das Phasenbild sieht folgendermaßen aus:

BILD

Die Ruhelage $(0,0)$ ist <u>instabil</u> und <u>nicht attraktiv</u>.

Die Ruhelage $(1,0)$ ist <u>instabil</u>, <u>z.B.</u> alle Lösungen auf dem Einheitskreis mit $x_0^2+y_0^2=1$ und $y_0>0$ verlassen eine Umgebung der Ruhelage (aber kommen später zurück über $x=-1, y=0$!). Aber diese Ruhelage ist <u>attraktiv</u> mit dem Einzugsbereich

$$\mathcal{U}=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

d.h. ganz $\mathbb{R}^2$ ausserhalb der anderer Ruhelage $(0,0)$.

21.1 Lineare Autonome System

Wir betrachten jetzt die AWA

$$\frac{dx}{dt}=Ax,\quad x(0)=x_0,\qquad x\in\mathbb{R}^d,$$

wobei A eine $d\times d$ konstante Matrix ist, d.h. ein <u>autonomes</u> System — $t_0=0$ reicht !

Die Lösung lautet

$$\boxed{x(t,x_0)=e^{At}x_0}$$

und $\bar{x}=0$ ist eine Ruhelage — eindeutig, falls A invertierbar ist.

In diesem Fall ist die <u>Stabilität</u> der Ruhelage eine Folge der <u>Attraktivität</u> der Ruhelage. — (<u>Beweis später.</u>

<u>Beispiel:</u> $d=1$ $\quad\boxed{\frac{dx}{dt}=ax}\quad\Longrightarrow\quad x(t,x_0)=e^{at}x_0$

$$\bar{x}\quad\text{ist}\quad\begin{cases}\underline{\text{instabil}}, & \text{falls}\quad a>0\\ \underline{\text{stabil}}, & \text{falls}\quad a=0\\ \underline{\text{attraktiv}}, & \text{falls}\quad a<0\end{cases}$$

<u>d.h.</u> das <u>Vorzeichen</u> des Eigenwerts $\lambda_A=a$ der 1×1 Matrix $A=[a]$ betimmt die Art <u>stabilen</u>/<u>instabilen</u> Verhaltens.

Diese Bemerkung gilt auch in dem allgemeinen Fall, aber mit dem Vorzeichen der <u>Reellteile der Eigenwerte</u> $\Re(\lambda_A)<0$ von A .

<u>Satz:</u> Die Ruhelage $\bar{x}=0$ ist <u>attraktiv</u> genau dann, wenn $\Re(\lambda_A)<0$ für <u>alle</u> Eigenwerte von A.

Beweis::

(1) ($\Longrightarrow$ Richtung — hinreichende Bedingung)

Voraussetzung $\Re(\lambda_A) < 0$ für alle Eigenwerte λ_A von A.

Die Lösung $x(t, x_0) = e^{At} x_0$ genügt

$$|x(t, x_0)| \leq \left\| e^{At} \right\| \, |x_0|$$

für verträgliche Matrix/Vektoren Norme!

Die Komponenten von e^{At} sind lineare Kombinationen von Terme der Form $e^{\lambda_i t}$ oder $t^j e^{\lambda_i t}$, $0 \leq j \leq n_i < d-1$, wobei λ_i ein Eigenwert von A ist.

$$\Longrightarrow \quad \left\| e^{At} \right\| \leq K_A \max_{\lambda_j i} \left\{ \left| e^{\lambda_i t} \right|, t^j \left| e^{\lambda_i t} \right| \right\} \leq K_A \max_{\lambda_i j} \left\{ e^{\Re \lambda_i t}, t^j e^{\Re(\lambda_i) t} \right\} \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \to \infty,$$

weil alle $\Re \lambda_i < 0$ sind. Daher gilt

$$|x(t, x_0)| \leq K_A \, |x_0| \max_{\lambda_i} \left\{ e^{\Re \lambda_i t}, t^j e^{\Re \lambda_j i t} \right\} \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \to \infty \qquad \text{und alle } x_0!$$

d.h. die Ruhelage $\bar{x} = 0$ ist attraktiv mit Einzugsbereich $\mathbb{R}^2$ — global attraktiv !

(2) ($\Longrightarrow$ Richtung — notwendige Bedingung)

Wir benutzen ein kontrapositives Argument

Sei λ_i ein Eigenwert von A mit $\Re \lambda_i \geq 0$ und sei v_i einer der entsprechenden Eigenvektoren.

Sei $\rho > 0$. Dann gilt $x(t, \rho v_i) = e^{At}(\rho v_i) = \rho v_i e^{\lambda_i t} \quad \Longrightarrow \quad |x(t, \rho v_i| = \rho \, |v_i| \, e^{\Re \lambda_i t}$

Es gibt 2 Fälle

i) $\Re \lambda_i > 0 \quad \Longrightarrow \quad |x(t, \rho v_i)| \to \infty$ für $t \to \infty$

ii) $\Re \lambda_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad |x(t, \rho v_i)| \equiv \rho \, |v_i| \quad \forall t \geq 0$

In den beiden Fällen: mit $\rho > 0$ beliebig klein haben wir einen Anfangsvektor $x_0 = \rho v_i$ beliebig nah zu $\bar{x} = 0$ für welche die Lösung $x(t, \rho v_i)$ nicht gegen 0 strebt !

d.h. $\bar{x} = 0$ ist nicht attraktiv.

Ein kontrapositives Argument, d.h.

$$\boxed{(\text{nicht } Q \implies \text{nicht } P) \quad \underline{\text{äquivalent}} \quad (P \implies Q)}$$

bedeutet in diesem Fall, dass

$$\bar{x} \quad \text{attraktiv} \quad \Longrightarrow \Re(\lambda_A) < 0 \quad \text{für alle Eigenwerte der Matrix } A.$$

■

Kapitel 22

Stabilität nochmal

Wir betrachten nochmal ein lineares autonomes System

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

wobei A eine Konstante $d \times d$ Matrix ist. Die Lösung mit Anfangswert $x(0) = x_0$ lautet

$$x(t, x_0) = e^{At} x_0$$

und der Ursprung $\bar{x} = \underline{0}$ ist eine Ruhelage – die eindeutig ist, falls A invertierbar ist!

Die Ruhelage $\bar{x} = \underline{0}$ ist stabil genau dann, wenn es für jeden Eigenwert λ_A von A gilt:

entweder $\Re(\lambda_A) < 0$ oder $\Re(\lambda_A) = 0$ mit λ_A halbeinfach,

wobei $\Re(\lambda_A)$ der Reellteil von λ_A ist.

Bemerkung: λ_A ist halbeinfach bedeutet, dass die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten identisch sind, d.h. die Anzahl unabhängiger Eigenvektoren und die algebraische Vielfachheit sind gleich $\implies$ keine Jordan-Blöcke mit diesem Eigenwert der Form

$$\begin{bmatrix} \lambda_A & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_A & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_A & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_A \end{bmatrix}$$

$\implies$ keine Terme der Form $t^j e^{\lambda_A t}$ mit $j > 0$ in e^{At} mit diesem Eigenwert.

Beweis:

(1) ($\Leftarrow$ Richtung — hinreichende Bedingung)

Sei entweder $\Re(\lambda_A) < 0$ oder $\Re(\lambda_A) = 0$ mit λ_A halbeinfach für jeden Eigenwert λ_A von A.

Die Komponenten von e^{At} sind lineare Kombinationen von Termen der Form

1) $e^{\lambda_i t}$, falls $\lambda_i = \lambda_A$ <u>halbeinfach</u> ist,

2) $t^j e^{\lambda_i t}$ mit $0 \leq j \leq n_i - 1$, falls $\lambda_i = \lambda_A$ <u>nicht halbeinfach</u> ist

$$\Longrightarrow \qquad \left\| e^{At} \right\| \leq K_A \max_{t \geq 0} \begin{cases} \max_i e^{\Re(\lambda_i)t} & \lambda_i \quad \text{halbeinfach} \quad \Re(\lambda_i) \leq 0 \\ \max_i t^j e^{Re(\lambda_i)t} & \lambda_i \quad \text{nicht halbeinfach} \quad \Re(\lambda_i) < 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \left\| e^{At} \right| \leq \tilde{K_A} < \infty \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

Dann genügt die Lösung $x(t, x_0) = e^{At}x_0$ der Abschätzung

$$|x(t, x_0)| = \left| e^{At}x_0 \right| \leq \left\| e^{At} \right\| |x_0| \leq \tilde{K}_A \, |x_0| \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

(verträgliche Matrix/Vektorennormen hier !)
Definiere $\delta = \delta(\varepsilon) := \varepsilon / \tilde{K_A}$. Dann gilt

$$|x_0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |x(t, x_0)| < \varepsilon.$$

<u>d.h.</u> die Ruhelage $\bar{x} = 0$ ist <u>stabil</u> !

(2) ($\Longrightarrow$ Richtung — <u>notwendige Bedingungen</u>)

Sei $\Re(\lambda_i) > 0$ und sei v_i der entsprechende Eigenvektor (oder einer davon). Dann gilt $x(t, \rho v_i)$ $= e^{At}(\rho v_i) = \rho v_i e^{\lambda_i, t}$, wobei $\rho > 0$.

$$\Longrightarrow \qquad |x(t, \rho v_i)| = \rho \, |v_i| \, e^{\Re(\lambda_i)t} \longrightarrow +\infty \qquad +\text{für } t \to \infty.$$

Aber wir können $\rho > 0$ beliebig klein wählen, <u>d.h.</u> der Anfangswert $x(0) = \rho v_i$ ist beliebig nah zu $\bar{x} = \underline{0}$

$\Longrightarrow$ die Ruhelage $\bar{x} = \underline{0}$ ist <u>instabil</u>.

Sei $\Re(\lambda_i) = 0$ mit λ_i <u>nicht</u> halbeinfach und sei v_i ein entsprechender Eigenvektor mit verallgmeinerten Eigenvektoren $w_{i,1}$, <u>d.h.</u>

$$Av_i = \lambda_i v_i, \qquad Aw_{i,1} = \lambda_i wi, 1 + v_i$$

Betrachte die Lösung (ja !)

$$\boxed{x(t) = x(t, \rho w_{i,1}) = \rho e^{\lambda_i t} w_{i,1} + \rho t e^{\lambda_i t} v_i}$$

mit dem Anfangswert $x(0) = \rho w_{i,1,}$ wobei $\rho > 0$ beliebig ist

$\Longrightarrow$ $|x(0)| = \rho \, |w_{i,1}| \to 0$ für $\rho \to 0!$

Annahme: $\Re(\lambda_i) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left| e^{\lambda_i t} \right| \equiv 1$

Deshalb gilt

$$\rho^2 t^2 \, |v_i|^2 = \left| \rho t e^{\lambda_i t} v_i \right|^2 = \left| x(t) - \rho e^{\lambda_i t} w_{i,1} \right|^2 \leq 2 \, |x(t)|^2 + \underbrace{2\rho^2 \, |w_{i,1}|^2}_{\text{eine Konstante}}$$

Aber $\rho^2 t^2 |v_i|^2 \to \infty$ für $t \to \infty$

$$\Longrightarrow \quad |x(t)|^2 \longrightarrow \infty \quad \text{für } t \to \infty$$

Wir können $|x(0)| = \rho |w_{i,1}|$ beliebig klein wählen $\Longrightarrow$ die Ruhelage $\bar{x} = \underline{0}$ ist <u>instabil</u>.

In beiden Fällen folgt die Behauptung „stabil“von einem kontrapositiven Argument. ■

<u>Korollar 1:</u> *Attraktivität* $\Longrightarrow$ *Stabilität*

<u>Korollar 2:</u> *Die Ruhelage $\bar{x} = 0$ ist <u>asymptotisch stabil</u> genau dann, wenn es gilt $\Re(\lambda_A) < 0$ für <u>alle</u> Eigenwerte λ_A von A.*

Die Attraktivität der RL hier ist <u>exponentiell</u> schnell, <u>d.h.</u>

$$|x(t, x_0)| \leq K_A \, |x_0| \, e^{-\alpha t},$$

wobei

$$\max_{\lambda_A} \Re(\lambda_A) \leq -\alpha < 0.$$

Man sagt oft, dass die Ruhelage <u>exponentiell stabil</u> ist. Aber im Allgemeinen ist die Attraktivität einer RL <u>nicht</u> exponentiell schnell.

<u>Beispiel</u> $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = -x^3}$ <u>Ruhelage</u> $\bar{x} = 0$ mit Lösung

$$x(t, x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}} \quad \approx \quad \frac{1}{\sqrt{2t}} \quad \text{für } t >> 0$$

$$\longrightarrow \quad 0 \quad \text{für } t \longrightarrow \infty$$

aber dieKonvergenz hier ist <u>nicht</u> exponentiell schnell.

<u>Merke:</u> die DGL hier ist <u>nichtlinear</u> !!

22.1 Linearisierte Systeme

<u>Literatur:</u> Aulbach 7.6, Baumeister 5.5

Betrachte eine <u>nichtlineare autonome</u> DGL

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

mit einer <u>Ruhelage</u> $\bar{x}$, d.h. mit $f(\bar{x}) = 0$.

Wir werden annehmen, dass $\bar{x} = 0$, d.h. $f(0) = 0$, ist — dies ist immer möglich nach einer Koordinatentranslation:

$$y = x - \bar{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{d\bar{x}}{dt} = f(x) - 0 = f(y + \bar{x}) \quad \Longrightarrow \quad \text{mit Ruhelage } \bar{y} = 0!$$

Voraussetzung f ist mindestens 2 mal stetig differenzierbar
Taylorentwicklung um $\bar{x} = 0$ ergibt

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \underbrace{\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0)\right]}_{\text{Jacobi-Matrix}} x + \underbrace{N(x)}_{\text{nichtlinear}} \qquad \boxed{f(x) = Ax + N(x)}$$

Die nichtlineare DGL lautet

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = Ax + N(x)}$$

und besitzt (mindestens) eine Ruhelage $\bar{x} = 0$.

Was können wir über die Stabilität, asymptotische Stabilität usw dieser Ruhelage $\bar{x} = 0$ sagen?

Satz 17 *Sei die Ruhelage $\bar{z} = 0$ des linearen Systems*

$$\frac{dz}{dt} = Az, \qquad z \in \mathbb{R}^d,$$

asymptotisch stabil und sei $N : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar mit

$$N(0) = 0 \in \mathbb{R}^d \qquad \text{und} \qquad \left[\frac{\partial N_i}{\partial x_j}(0)\right] = 0 \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

Dann ist die Ruhelage $\bar{x} = 0$ des nichtlinearen Systems

$$\frac{dx}{dt} = Ax + N(x)$$

asymptotisch stabil.

Wir werden den Satz in der nächsten Vorlesung Nr. 23 beweisen.

Beispiel $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = x(1-x)}$ $\quad f(x) = x(1-2)$ mit 2 Ruhelagen $\bar{x} = 0$ und $\bar{x} = 1$

1) Ruhelage $\bar{x} = 0$

$$\frac{dx}{dt} = x - x^2 \quad \text{mit} \quad A = [1],\ N(x) = -x^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{dt} = z \quad \Longrightarrow \quad \text{RL } \bar{z} = 0 \quad \text{ist instabil}$$

Der Satz sagt nichts hier über die RL $\bar{x} = 0$ der nichtlinearen DGL.

2) Ruhelage $\bar{x} = 1$ Erstens: eine Koordinatentranslation $y = x - \bar{x} = x - 1$ oder $x = y + 1$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} = x - x^2 = (y+1) - (y+1)^2 = -y - y^2$$

dh

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = -y - y^2}$$

mit $A = [-1]$ und $N(y) = -y^2$

Das entsprechende lineare System ist

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = -z}$$

und die Ruhelage $\bar{z} = 0$ ist asymptotisch stabil

Satz 18 *Die Ruhelage $\bar{y} = 0$ (oder $\bar{x} = 1$ in den alten Koordinaten) der nichtlinearen DGL ist auch asymptotisch stabil.*

spezifisch lokal asymptotisch stabil, d.h. mindestens in einer gewissen Umgebung der Ruhelage — aber wir wissen schon von der expliziten Lösung, dass der Einzugsbereich $= (0, \infty)$ in den ursprünglichen x- Koordinaten.)

Kapitel 23

Linearisierte Systeme

Um den letzten Satz (in der letzten Vorlesung) zu beweisen, brauchen wir ein bißchen Vorbereitung.

<u>Vorbereitung (1)</u> Die Lösung $x(t; x_0)$ der nichtlinearen AWA

$$\frac{dx}{dt} = Ax + N(x), \qquad x(0) = x_0$$

genügt der Integralgleichung

$$\boxed{x(t, x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}N(x(s, x_0))\, ds}$$

<u>d.h.</u> eine Art der "Variation-der-Konstanten-Formel".

Der Beweis ist direkt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t, x_0) &= \frac{d}{dt}\left\{e^{At}\left[x_0 + \int_0^t e^{-As}N(x(s, x_0))\, ds\right]\right\} \qquad \text{Produktregel !} \\ &= Ae^{At}\left[x_0 + \int_0^t e^{-As}N(x(s, x_0))\, ds\right] \\ &\quad + e^{At}\frac{d}{dt}\int_0^t e^{-As}N(x(s, x_0))\, ds \\ &= Ax(t, x_0) + e^{At}e^{-As}N(x(s, x_0))\Big|_{s=t} \\ &= Ax(t, x_0) + N(x(t, x_0)) \end{aligned}$$

mit dem Anfangswert

$$x(0, x_0) = e^{A0}\left[x_0 + \int_0^0 e^{-As}N(x(s, x_0))\, ds\right] = I\,[x_0 + 0] = x_0.$$

<u>Vorbereitung (2)</u> Schreibe $\nabla N(x) = \left[\frac{\partial N_i}{\partial x_j}(x)\right]$, d.h. die $d \times d$ Jacobi-Matrix

Von dem vektorwertigen Mittelwertsatz für Ableitungen gilt

$$N(x) - N(0) = \nabla N(\xi_x)\, x$$

für ein $\xi_x = \theta x$ mit $\theta \in [0,1]$ (θ hängt von x ab)

$$N(0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{N(x) = \nabla N(\xi_x)\, x}$$

Sei $M > 0$ gegeben. Wegen der Stetigkeit der Funktion $x \mapsto \nabla N(x)$ existiert ein $\rho = \rho_M > 0$ mit

$$|x| \leq \rho \quad \Longrightarrow \quad \|\nabla N(x)\| \leq M.$$

Aber

$$|x| \leq \rho \quad \Longrightarrow \quad |\xi_x| = |\theta| \leq |x| \leq \rho \qquad \Longrightarrow \quad \|\nabla N(\xi_x)\| \leq M.$$

Dann von oben haben wir

$$|x| \leq \rho \quad \Longrightarrow \quad |N(x)| \leq \ \|\nabla N(\xi_x)\| \ |x| \ \leq M\,|x|$$

d.h.

$$\boxed{|N(x)| \leq M\,|x| \quad \text{für } |x| \leq \rho}$$

Beweis:: (des Satzes) Wegen der asymptotischen Stabilität der Ruhelage $\bar{z} = 0$ des linearisierten Systems

$$\frac{dz}{dt} = Az$$

genügen alle Eigenwerte λ_A von A der Bedingung

$$\Re(\lambda_A) < 0.$$

Daher gibt es 2 Konstanten $K \geq 1$ und $\alpha > 0$ mit

$$\Re(\lambda_A) \leq -\alpha < 0 \text{ für alle } \lambda_A,$$

so dass

$$\left\|e^{At}\right\| \leq Ke^{-\alpha t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Sei $M > 0$ beliebig mit $M < \dfrac{\alpha}{K}$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $\boxed{MK - \alpha < 0}$ (gebraucht später!).

Für dieses M wähle $\rho = \rho_M < 0$ (siehe Vorbereitung (2)), so dass

$$|x| \leq \rho \quad \Longrightarrow \quad |M(x)| \leq M\,|x|$$

Schließlich für jeden Annfangswert x_0 mit $|x_0| \leq \rho$ definiere die „Endzeit“.

$$T^*(x_0) = \sup\{T > 0 : \, |x(t, x_0)| \leq \rho, \ \forall t \in [0, T]\}$$

zu der die Lösung $x(t, x_0)$ der nichtlinearen DGL die ρ- Umgebung der Ruhelage $\bar{x} = 0$ verläßt ($T^*(x_0) = \infty$ ist möglich hier!).

<u>Schritt 1</u> Wir werden zeigen, dass

$$\boxed{|x(t, x_0)| \leq K \ |x_0| \ e^{(KM-\alpha)t}}$$

für alle $t \in [0, T^*(x_0))$.

Von der Integralgleichung (siehe Vorbereitung (1))

$$x(t, x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} N(x(s, x_0))\, ds$$

erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |x(t, x_0)| &\leq \left\|e^{At}\right\| \, |x_0| + \int_0^t \left\|e^{A(t-s)}\right\| \, |N(x(s, x_0))|\, ds \\ &\leq Ke^{-\alpha t}|x_0| + \int_0^t Ke^{-\alpha(t-s)}|N(x(s, x_0))|\, ds \end{aligned}$$

für jedes $t \geq 0$ (so lang, dass die Lösung existiert $\Longrightarrow$ mindestens $t \leq T^*(x_0)!$). Insbesonders für $0 \leq t < T^*(x_0)$ gilt

$$|x(s, x_0)| \leq \rho.$$

Daher haben wir

$$|N(x(s, x_0))| \leq M|x(s, x_0)|$$

für $0 \leq s \leq t < T^*(x_0)$. Die obige Abschätzung lautet jetzt

$$|x(t, x_0)| \leq K|x_0|e^{-\alpha t} + \int_0^t KMe^{-\alpha(t-s)}|x(s, x_0)|\, ds$$

<u>oder</u>

$$e^{\alpha t}|x(t, x_0)| \leq K|x_0| + \int_0^t KM\, e^{\alpha s}|x(s, x_0)|\, ds$$

für alle $0 \leq t < T^*(x_0)$. Wir verwenden jetzt die <u>Gronwall-Ungleichung</u>

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_0^t \beta\, \varphi(s)\, ds \quad (\beta > 0) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(t) \leq \alpha\, e^{\int_0^t \beta\, ds} = \alpha e^{\beta t}$$

mit

$$\varphi(t) = e^{\alpha t}|x(t, x_0)|, \qquad \alpha = K|x_0|, \qquad \beta = KM > 0$$

<u>d.h.</u>

$$e^{\alpha t}\, |x(t, x_0)| \;\leq\; K|x_0|\, e^{KMt} \qquad \Longrightarrow \qquad |x(t, x_0)| \;\leq\; K|x_0|\, e^{(KM-\alpha)t}$$

für alle $0 \leq t < T^*(x_0)$ und $|x_0| \leq \rho$.

<u>Schritt 2</u> Durch die obige Wahl von M gilt $KM - \alpha < 0$. Daher fällt $e^{(KM-\alpha)t}$ streng monoton ab für $t \to \infty$.

BILD

Daher für $|x_0| \leq \dfrac{\rho}{K} \leq \rho$ (weil hier $K \geq 1$ ist) haben wir

$$|x(t, x_0)| \leq K\, \frac{\rho}{K}\, e^{(KM-\alpha)t} \leq \rho$$

für alle $0 \leq t < T^*(x_0)$.

Dies zeigt zunächst, dass

$$T^*(x_0) = +\infty \quad \text{für alle } x_0 \text{ mit } |x_0| \leq \frac{\rho}{K}.$$

Schritt 3 Definiere $\nu = \dfrac{\rho}{K}$. Dann für $|x_0| \leq \nu$ haben wir

$$\begin{aligned} |x(t, x_0)| &\leq \rho e^{(KM-\alpha)t} \qquad \text{für alle } t \geq 0 \\ &\longrightarrow 0 \qquad \text{für } t \to \infty. \end{aligned}$$

d.h. Die Ruhelage $\bar{x} = 0$ der nichtlinearen DGL ist attraktiv – mindestens für Anfangswerte x_0 mit $|x_0| \leq \nu = \rho/K$.

Schritt 4 Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, und definiere

$$\varphi = \varphi(\varepsilon) = \min\left\{\frac{\varepsilon}{K}, \frac{\rho}{K}\right\} > 0$$

Dann für $|x_0| < \varphi$ haben wir

$$|x_0| < \varphi \leq \frac{\rho}{K} \qquad \Longrightarrow \qquad T^*(x_0) = +\infty$$

und die Lösung $x(t, x_0)$ genügt der Abschätzung

$$|x(t, x_0) <\leq K|x_0|\, e^{(KM-\alpha)t}$$

für alle $t \geq 0$.

Aber $|x_0| < \varphi \leq \varepsilon/K$ auch:

$$|x(t, x_0)| \leq K\,\frac{\varepsilon}{K}\, e^{(KM-\alpha)t} \leq \varepsilon\, e^{(KM-\alpha)t} \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } t \geq 0 \text{ weil } KM - \alpha < 0$$

d.h. $|x_0| < \varphi \quad \Longrightarrow \quad |x(t, x_0)| < \varepsilon$ für alle $t \geq 0 \quad \Longrightarrow$ die Ruhelage $\bar{x} = 0$ ist auch stabil.

Schluss Attraktivität und Stabilität $\equiv$ asymptotische Stabilität

$\Longrightarrow$ die Ruhelage $\bar{x} = 0$ der nichtlinearen DGL ist asymptotisch stabil. ■

Bemerkung Die Stabilität ohne Attraktivität der Ruhelage des linearistischen Systems ist nicht stark genug, um die Stabilität der RL des nichtlinearen Systems zu versichern.

Beispiel $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = \pm x^3}$ in $\mathbb{R}^1$ d.h. $\dfrac{dx}{dt} = 0 \cdot x \pm x^3$ mit $A = [0]$ und $N(x) = \pm x^3$.

Das linearisierte System lautet

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = 0 \cdot z} \quad \text{d.h.} \quad \frac{dz}{dt} \equiv 0$$

und die Ruhelage $\bar{z} = 0$ ist <u>stabil</u>, aber <u>nichtattraktiv</u>

1) $\boxed{\frac{dx}{dt} = -x^3}$ die Ruhelage $\bar{x} = 0$ ist <u>asymptotisch stabil</u>, weil die Lösung

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2x_0^2 t}} \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \to \infty \quad \text{für alle } x_0$$

2) $\boxed{\frac{dx}{dt} = +x^3}$ die Ruhelage $\bar{x} = 0$ ist <u>instabil</u> mit Lösungen

$$|x(t)| = \frac{|x_0|}{\sqrt{1 - 2x_0^2 t}} \longrightarrow \infty \quad \text{für } t \uparrow \frac{1}{2x_0^2} \quad \text{für alle } x_0 \neq 0.$$

Kapitel 24

Ljapunov-Funktionen

Literatur Aulbach 7.8, Baumeister 5.6

Der letzte Satz über den Zusammenhang zwischen der asymptotischen Stabilität der Ruhelage des linearsierten Systems und der asymptotischen Stabilität der Ruhelage des nichtlinearen Systems ist oft sehr nützlich, aber ist auch begrenzt..

Z.B. er sagt nichts darüber, wie groß der Einzugsbereich der nichtlinearen Ruhelage ist – dieser könnte sehr klein sein ! Oder sehr groß!

Beispiel $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = -x\left(\varepsilon^2 - x^2\right)}$ mit $\varepsilon > 0$ und Ruhelagen $\bar{x} = 0, \pm\varepsilon$.

$$f(x) = -x\left(\varepsilon^2 - x^2\right) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\varepsilon^2 + 3x^2.$$

Das linearisierte System für die Ruhelage $\bar{x}$ lautet

$$\frac{dz}{dt} = f'(\bar{x})\, z.$$

Ruhelagen $\bar{x} = \pm\varepsilon$ $\quad f'(\pm\varepsilon) = +2\varepsilon^2 > 0 \quad \dfrac{dz}{dt} = 2\varepsilon^2 z \quad \Longrightarrow$ Ruhelage $\bar{z} = 0$ ist instabil.

Unser Satz ergibt keine Information über die nichtlinearen Ruhelagen $\bar{x} = \pm\varepsilon$.

Ruhelage $\bar{x} = 0$ $\quad f'(0) = -\varepsilon^2 < 0 \quad \dfrac{dz}{dt} = -\varepsilon^2 z \quad \Longrightarrow$ Ruhelage $\bar{z} = 0$ ist asymptotitsch stabil.

Unser Satz sagt, dass die nichtlineare RL $\bar{x} = 0$ auch asymptotisch stabil ist. Wir können direkt sehen, dass der Einzugsbereich $= (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist.

BILD

Dies ist OK, falls ε nicht zu klein ist. Aber, wenn z.B. $\varepsilon = 10^{-10}$ ist, sieht das Bild folgendermaßen aus

BILD

In diesem Fall ist die Ruhelage $\bar{x} = 0$ praktisch instabil , obwohl sie theoretisch asymptotisch stabil ist.

Beispiel $\boxed{\frac{dx}{dt} = -x - x^3}$ $\bar{x} = 0$ ist die einzige Ruhelage.

$$f(x) = -x - x^3, \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -1 - 3x^2.$$

Das linearisierte System mit $f'(0) = -1$ hier lautet

$$\frac{dz}{dt} = -z,$$

d.h. $\bar{z} = 0$ ist asymptotisch stabil.

Satz *Die Ruhelage $\bar{x} = 0$ ist asymptotisch stabil für die nichtlineare DGL.*

Frage *Wie groß ist der Einzugsbereich der Ruhelage $\bar{x} = 0$?*

Wir können die explizite Lösung finden und direkt zeigen, dass

$$x(t, x_0) \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \longrightarrow \infty$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

d.h. Einzugsbereich $\equiv \mathbb{R}$ und die Ruhelage ist global asymptotisch stabil

Frage *Was könenn wir ohne Kenntnis der expliziten Lösung tun ?*

Richtungsfelder - JA, aber zu grob und nur für DGLen in in $\mathbb{R}^1$.

Betrachte die Funktion $V(x) = x^2$ und merke, dass

$$V(\bar{x}) = 0, \qquad V(x) > 0 \quad \text{für } x \neq \bar{x} = 0$$

d.h. eine positiv definierte Funktion (bzgl. der Ruhelage $\bar{x} = 0$).

Sei $x(t) = x(t, x_0)$ die Lösung der nichtlinearen DGL mit Anfangswert $x(0) = x_0 \neq 0$ und betrachte jetzt die Funktion

$$t \longrightarrow V(x(t)) = x(t)^2.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(x(t)) &= \frac{dV}{dx}(x(t))\,\frac{d}{dt}x(t) && \text{Kettenregel} \\
&= 2x(t)\,\left[-x(t) - x(t)^3\right] && \text{Lösung der DGL} \\
&= -2x(t)^2 - 2x(t)^4 \\
&= -2V(x(t)) - 2x(t)^4 \leq -2V(x(t))
\end{aligned}$$

weil $x(t)^4 \geq 0$ für alle $t \geq 0$ ist, d.h.

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq -2V(x(t)) \qquad \text{eine Differential\underline{un}gleichung!}$$

mit Lösung"

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) e^{\int_0^t -2\,ds} \leq V(x_0) e^{-2t}.$$

Daher gilt

$$V(x(t)) \leq V(x_0) e^{-2t} \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \to \infty.$$

Aber $V(x(t)) = x(t)^2 > 0$ für alle $t > 0$, falls $x_0 \neq 0$.

$$\Longrightarrow \quad 0 < x(t)^2 \leq x_0^2\, e^{-2t} \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \to \infty \text{ und alle } x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \text{der Einzugsbereich} \equiv \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Die Funktion V hier heißt Ljapunov-Funktion. Wir haben diese Ljapunov-Funktion benutzt, ohne die explizite Lösung zu kennen !

Wichtig oben war die algebraische Bedingung

$$(*) \qquad \boxed{\frac{dV}{dx}(x)\, f(x) \leq -2V(x)} \qquad x \neq 0.$$

Wenn wir eine positiv definite Funktion V finden, die dieser (oder einer) ähnlichen algebraischen Bedingung genügt, dann können wir die Attraktivität (tatsächlich auch die Stabilität) der Ruhelage $\bar{x} = 0$ zeigen.

Die algebraische Bedingung (*) ist stärker als was wir brauchen, z.B. es reicht, dass

$$\frac{dV}{dx}(x)\, f(x) \leq 0$$

in einer Umgebung der Ruhelage $\bar{x} = 0$.

Beispiel $\boxed{\frac{dx}{dt} = -x^3}$

$$f(x) = -x^3, \quad f'(x) = -3x^2 \qquad \text{Ruhelage } \bar{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 0$$

Betrachte nochmal die Funktion $V(x) = x^2$. Hier gilt

$$\frac{dV}{dx}(x)\, f(x) = 2x\left[-x^3\right] = -2x^4 \leq 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

(tatsächlich stärker, mit < 0 für alle $x \neq 0$).

Sei $x(t) = x(t, x_0)$ die Lösung der DGL mit Anfangswert $x(0) = x_0 \neq 0$

$$\Longrightarrow \quad x(t, x_0) \neq 0 \text{ für alle } t \geq 0.$$

Dann gilt
$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \frac{dV}{dx}(x(t))\,f(x(t)) = -2x(t)^4 < 0 \qquad \text{für } \underline{\text{ alle }}\ t > 0$$

$$\Longrightarrow \qquad V(x(t)) < V(x_0) \quad \text{ für alle } t > 0$$

Tatsächlich gilt $V(x(t+s)) < V(x(s))$ für alle $t > s \geq 0$ — nimm $x(s)$ als den Anfangswert statt $x(0)$ — ein autonomes System hier

d.h. Die Funktion $t \mapsto V(x(t))$ ist streng monoton abfallend mit $V(x(t)) > 0$ für alle $t > 0$

$$\Longrightarrow \qquad \text{der Limes } \lim_{t\to\infty} V(x(t)) \geq 0 \text{ existiert.}$$

Es gibt 2 Möglichkeiten

1) $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} V(x(t)) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{t \longrightarrow \infty} x(t) = 0,$ oder
2) $\lim\limits_{t\to\infty} V(x(t)) = V_0 > 0$

Sei $\{t_n\}$ eine zunehmende Folge mit $t_n \to \infty$. Dann gilt
$$V(x(t_n)) \longrightarrow V_0 \qquad \text{für} \quad n \to \infty$$
mit $V(x(t_0)) \geq V_0$ für alle n.

Wähle $\bar{x}_0 \neq 0$ mit $V(\bar{x}_0) = \bar{x}_0^2 = V_0$ und $\bar{x_0} \cdot x_0 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x(t_n)^2 \to \bar{x}_0^2$ für $n \to \infty$

$$\Longrightarrow \qquad x(t_n) \to \bar{x}_0 \text{ für } n \to \infty \text{ (d.h. mit dem gleichen Vorzeichen)}$$

Aber für jedes $\tau > 0$ gilt auch
$$V(x(\tau + t_n)) \longrightarrow V_0 \quad \text{für } n \to \infty \qquad \Longrightarrow \qquad x(\tau + t_n) \longrightarrow \bar{x_0} \quad \text{für } n \to \infty$$
(die Lösung hier bleibt an der selben Seite der Ruhelage)

Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen einer AWA gilt
$$\begin{aligned} x(\tau + t_n) &= x(\tau + t_n, x_0) \qquad \underline{\text{ursprünglicher Anfangswert}} \\ &= x(\tau; x(t_n, x_0)) \\ &= x(\tau, x(t_n)) \end{aligned}$$

Dann wegen der stetigen Abhängigkeit von Anfangswerten haben wir auch
$$x(\tau, x(t_n)) \longrightarrow x(\tau, \bar{x}_0) \qquad \text{für } n \to \infty,$$
weil $x(t_n) \to \bar{x}_0$ für $n \to \infty$.

d.h $\boxed{x(\tau, \bar{x_0}) \equiv \bar{x}_0}$ für alle $\tau > 0 \quad \Longrightarrow \quad \bar{x}_0$ ist eine Ruhelage !

Aber die einzige RL ist $\bar{x} = 0$! Widerspruch $V_0 \neq 0$ ist unmöglich

$$\Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} x(t,x_0) = 0 \quad \text{für alle } x_0. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung (Siehe Aulbach, Seite 341) Sei $\mathcal{D}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ mit $0 \in \mathcal{D}$. Betrachte die DGL

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad f(0) = 0,$$

in $\mathcal{D}$ und eine Lyapunov Funktion $V : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^+$, für welche

$$\nabla V(x)\, f(x)) \leq 0 \qquad \text{für } x \in \mathcal{D}.$$

Dann gilt auch

$$x(t,x_0) \;\longrightarrow\; 0 \qquad \text{für } x_0 \in \mathcal{D}$$

Der Beweis ist ähnlich, aber komplizierter.