GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Computerorientierte Mathematik
WS 2014/2015
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 8

Abgabe bis Freitag, 12.12.

Aufgabe 32: [Teilbarkeit]

Zeigen oder widerlegen sie folgende Aussagen für $n, a, b \in \mathbb{Z}$:

(a) $n \nmid a$ und $n \nmid b \Rightarrow n \nmid (a+b)$,

(b) $n \nmid a \Rightarrow n \nmid a \cdot b$,

(c) $\mathrm{ggT}(a, b) \mid \mathrm{kgV}(a, b)$.

Punkte: $\boxed{2/2/2}$

Aufgabe 33: [Modulo]

Sei $m \in \mathbb{N}$ und für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gelte

$$a \equiv b \bmod m \quad \text{und} \quad c \equiv d \bmod m.$$

Zeigen sie, dass daraus folgt

(a) $a + c \equiv (b + d) \bmod m$,

(b) $a - c \equiv (b - d) \bmod m$,

(c) $a \cdot c \equiv (b \cdot d) \bmod m$.

Punkte: $\boxed{2/2/2}$

Aufgabe 34: [Kongruenzen]

Bestimmen sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen für $x \in \mathbb{Z}$:

(a) $3x = 5 \bmod 11$,

(b) $2 = 3x \bmod 5$,

(c) $4x + 4 = (3x - 11) \bmod 15$.

Punkte: $\boxed{1/1/1}$

Aufgabe 35: [Kongruenzgeneratoren]

Betrachten sie den linearen Kongruenzgenerator

$$x_{i+1} = (ax_i + b) \bmod m$$

zur Erzeugung von gleichverteilten, ganzzahligen Pseudo-Zufallszahlen in $\{0, \ldots, m-1\}$

(a) Überprüfen sie, ob der Generator für die Wahlen von

- $a = 3432, b = 6789, m = 9973$
- $a = 1229, b = 1, m = 2048$
- $a = 1711, b = 0, m = 30269$

maximale Periode besitzt.

(b) Zeigen sie für den Fall $a = 7, b = 6, m = 64$, dass es Startwerte x_0 gibt, zu denen Orbits der Periodenlänge 1 und 2 gehören.

Punkte: $\boxed{3/4}$

Aufgabe 36: [Sage]

(a) Schreiben sie in Sage eine Funktion $LinKongruenz(a, b, m, x0, n)$ mit den Inputparametern a, b, m des linearen Kongruenzgenerators aus Aufgabe 35 und dem Startwert $x0$, welche die ersten n Zahlen des Kongruenzgenerators in einer Liste ausgibt.
Testen sie ihre Funktion für die Werte aus Aufgabe 35a) mit $x0 = 1$ und $n = 50$.

(b) Erstellen sie für den linearen Kongruenzgenerator mit $a = 1229, b = 1, m = 2048, x0 = 1, n = 2048$ eine Liste mit den Punktepaaren $[x_i/m, x_{i+1}/m]$ (als Liste von Listen) für $i = 0, 2, 4, 6, \ldots, 2046$. Wenden sie auf ihre Liste den *line*-Befehl an, um die Punkte mit einer Geraden zu verbinden und interpretieren sie ihre Grafik.
Hinweis: mit dem Befehl $n(Zahl)$ erhält die Zahl den Type RealNumber.

Punkte: $\boxed{3/3}$

Aufgabe 37: [LaTeX]

Schreiben sie den folgenden Text in LaTeX:

Sätzchen: Die Folge

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Zu zeigen ist: $\forall \epsilon > 0 \ \exists\ N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < \epsilon$, $\forall m, n > N$. Also:

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \right| && (1)\\
&= \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2} && (2)\\
&< \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k(k-1)} && (3)\\
&= \sum_{k=m}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) && (4)\\
&= \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n} \overset{!}{<} \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Punkte: $\boxed{8}$

Gesamtpunktzahl: 36 Punkte