GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Quadraturverfahren
WS 2014/15
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 3

Abgabe bis Mittwoch, 03.12., 14:15 Uhr

Aufgabe 7: [Gauß–Quadratur]

Betrachten sie das gewichtete Integral

$$I_w(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; f(x) \; dx \; .$$

(a) Für die angegebene Gewichtsfunktion sind die Tschebyscheff–Polynome orthogonal. Ermitteln sie die Stützstellen und Gewichte der entsprechenden N–Punkt Gauß–Quadraturformeln.

(b) Welchen polynomialen Exaktheitsgrad haben diese Quadraturformeln?

Aufgabe 8: [Adaptive Quadratur]

Zur numerischen Berechnung des Integrals

$$I(f) = \int_a^b f(x) \; dx$$

betrachte man die Simpsonregel

$$S = \frac{(b-a)}{6} \cdot \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

sowie die Simpsonsumme

$$T = \frac{(b-a)}{12} \cdot \left(f(a) + 4f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b) \right)$$

(a) Geben sie den Fehler der kombinierten Regel $U = T + \frac{T-S}{15}$ an.

(b) Ein adaptives Quadraturverfahren verfeinere das Integrationsgebiet $[a,b]$ falls der Integrationsfehler zu groß ist. Warum eignet sich der Wert $|T-S|$ als Schätzung für den Integrationsfehler?

(c) Wir wollen nun $[a,b]$ in zwei Hälften $[a,(a+b)/2]$, $[(a+b)/2,b]$ verfeinern, falls

$$|T-S| > \varepsilon \cdot (b-a)$$

und die beiden Teilintervalle separat integrieren. Dieser Vorgang wird rekursiv weitergeführt, falls der Fehler in dem jeweiligen Teilintervall immer noch zu groß ist. Integrieren sie die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$ im Intervall $[-1,1]$ auf diese Weise adaptiv für $\varepsilon = 0.01$. Verwenden sie jeweils U als endgültige Näherung der Teilintegrale.