Übung 2

Abgabe bis Mittwoch, 19.11., 14:15 Uhr

Aufgabe 5: [Riemann-Summen]

Betrachten sie die linksseitige Riemann-Summe R_n^l mit n Punkten zur numerischen Integration im Intervall $[0,1]$ der drei Funktionen

$$f_1(x) = x \quad , \quad f_2(x) = \sqrt{x} \;\text{ und }\; f_3(x) = \sin(\pi x).$$

(a) Ermitteln sie für die drei Funktionen das jeweilige Stetigkeitsmodul ω und damit obere Schranken für den Quadraturfehler.

(b) Berechnen sie für $n = 4, 16, 64, 256, 1024$ die jeweilige Riemann-Summe $R_n^l f_i$ und den exakten Quadraturfehler $E_n f_i = |R_n^l f_i - I f_i|$.

(c) Plotten sie jeweils Aufwand (n) gegen Genauigkeit ($E_n f_i$) in einen doppelt logarithmischen Plot und ermitteln sie so die näherungsweisen Konvergenzraten.

Aufgabe 6: [Orthogonalpolynome]

Es sei

$$(f,g) := \int_a^b \omega(t) f(t) g(t) \; dt$$

ein gewichtetes Skalarprodukt mit positiver Gewichtsfunktion ω. Weiterhin sei $\mathcal{P}_k$ der Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich k mit reellen Koeffizienten. Die Elemente einer Folge von Polynomen $\{P_k\}_k \subset \mathcal{P}_k$ vom exakten Grad k heissen Orthogonalpolynome über $[a,b]$ bezüglich der Gewichtsfunktion ω, falls gilt

$$(P_i, P_j) = \delta_{ij}(P_i, P_i).$$

(a) Zeigen Sie, dass es zu jedem gewichteten Skalarprodukt der obigen Gestalt eindeutig bestimmte Orthogonalpolynome $P_k \in \mathcal{P}_k$ mit führendem Koeffizienten 1 gibt und dass diese der Drei-Term-Rekursion

$$P_k(t) = (t + a_k) P_{k-1}(t) + b_k P_{k-2}(t) \text{ für } k = 1, 2, \ldots$$

mit den Anfangswerten $P_{-1} := 0, P_0 := 1$ und den Koeffizienten

$$a_k = -\frac{(tP_{k-1}, P_{k-1})}{(P_{k-1}, P_{k-1})} \quad \text{und} \quad b_k = -\frac{(P_{k-1}, P_{k-1})}{(P_{k-2}, P_{k-2})}$$

genügen.

(b) Zeigen Sie, dass das Polynom P_k aus Teilaufgabe (a) genau k einfache Nullstellen in $]a,b[$ besitzt.

(c) Sei $f \in C^{2n+2}[a,b]$ mit $-\infty \le a < b \le \infty$ und $\sup_{t\in[a,b]} |f^{(k)}(t)| < \infty$ für $k = 0, 1, \ldots, 2n+2$. Zeigen Sie, dass dann für den Approximationsfehler der Gauß-Quadratur

$$|E(f)| \le (P_{n+1}, P_{n+1}) \sup_{t\in[a,b]} \frac{|f^{(2n+2)}(t)|}{(2n+2)!},$$

gilt.

(d) Es sei die Gauß-Quadraturformel

$$Q(f) = \sum_{i=1}^{3} w_i f(x_i)$$

mit $w_1 = w_3 = 5/9, w_2 = 8/9, -x_1 = x_3 = \sqrt{3/5}, x_2 = 0$, zur Auswertung von $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Quadraturformel exakt für alle Polynome bis zum Grad 5 ist.