GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Quadraturverfahren
WS 2014/15
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 1

Abgabe bis Mittwoch, 5.11., 14:15 Uhr

Aufgabe 1: [Uneigentliche Integrale]

Untersuchen sie auf Riemann-Integrierbarkeit:

(a) $\int_0^1 x^{-k}\, dx$

(b) $\int_1^\infty x^{-k}\, dx$

(c) $\int_0^1 ln(x)\, dx$

für $k \in \mathbb{R}$. Betrachten sie dabei den Fall $k = 1$ separat. Geben sie im Fall der Integrierbarkeit die Lösung an.

Aufgabe 2: [Integrierbarkeit der Gauß-Funktion]

Die Integrale aus Aufgabe 1 können zur Abschätzung anderer uneigentlicher Integrale eingesetzt werden, indem man k und c findet, sodass für den Integrand $f(x) \leq cx^{-k}$ gilt. Zeigen sie, dass die Gauß-Funktion

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

auf $[0, \infty)$ Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 3: [Integral-Transformationen]

(a) Schreiben sie das Integral

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy$$

über dem Einheitskreis $S := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ als iteriertes Integral und berechnen sie es durch Lösen des inneren und des äußeren Integrals.

(b) Transformieren sie das Integral aus Aufgabe (a) in Polarkoordinaten (r, ϕ) und lösen es dadurch.

Aufgabe 4: [Gauß-Funktion]

(a) Berechnen sie

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \left(\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\, dxdy\right)^{1/2}$$

durch Transformation in Polarkoordinaten (r, ϕ).

(b) Berechnen sie das Integral auf der rechten Seite in Aufgabe (a) mit Hilfe der Transformation $y = xs$, $s \in \mathbb{R}^+$.