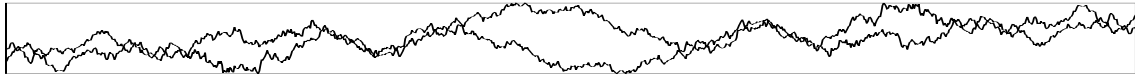




Programmierpraktikum Computational Finance

Blatt 2



1 Einführung

In diesem Blatt wollen wir uns mit Simulationsverfahren zur Bewertung von Optionen beschäftigen. Von diesen Verfahren ist die Monte Carlo Simulation sicherlich das am besten bekannte und am meisten verwendete. Die Monte Carlo Simulation ist jedoch im engeren Sinn kein numerisches sondern ein rein statistisches Verfahren. Sie konvergiert nur im statistischen Mittel und erlaubt keine deterministischen Fehlerschranken. Die Konvergenzrate selbst ist gering, dafür aber unabhängig von der Dimension des Problems. Diese letzte Eigenschaft und die (relativ) einfache Implementierbarkeit machen sie jedoch zu einem wichtigen Hilfsmittel in vielen Finanzanwendungen.

Neben der Monte Carlo Methode werden wir auf diesem und dem nächsten Blatt aber auch deterministische Verfahren wie Quasi-Monte Carlo Methoden und numerische Quadraturverfahren kennenlernen. Diese Methoden führen zu wesentlich schnellerer Konvergenz insbesondere für glatte Probleme. Die Konvergenzraten dieser Verfahren hängt dafür aber wieder mehr oder weniger von der Dimension des Problems ab.

Grundlage all dieser Verfahren ist die Darstellung des fairen Optionspreises als Erwartungswert. Zur Ermittlung dieses Erwartungswerts ist damit ein Integrationsproblem zu berechnen. Die exakte Lösung der entstehenden Integrale ist nur in wenigen Fällen (wie bei Europäischen Optionen, was zur bekannten Black-Scholes Formel führt) möglich. Daher müssen zur Lösung im allgemeinen numerische Verfahren eingesetzt werden.

Neben den bereits bekannten Europäischen und Amerikanischen Optionen werden wir nun auch sogenannte Asiatische Optionen betrachten. Bei diesen Optionen hängt der Wert der Option nicht nur vom Preis des Wertpapiers zum Ausübungszeitpunkt, sondern von den Wertpapierpreisen davor ab (solche Optionen werden daher auch pfadabhängige Optionen genannt). Bei Asiatischen Optionen geht in die Auszahlungsfunktion das Mittel dieser Wertpapierpreise ein. Hierbei werden verschiedene diskrete und kontinuierliche Mittelungsverfahren eingesetzt, wobei meist das arithmetische und das geometrische Mittel verwendet werden. Die Zahl der verwendeten Zeitpunkte zur Mittelungsbildung entspricht bei einer diskreten Mittelung dann der Dimension des zugehörigen Integrationsproblems.

2 Martingalansatz

Der Martingalansatz ist eines der grundlegenden Prinzipien zur Optionspreisbestimmung. Er besagt, daß der faire Wert einer Option (ohne vorzeitiges Ausübungsrecht) der diskontierte Erwartungswert der Auszahlungsfunktion unter der riskoneutralen Wahrscheinlichkeitsverteilung der zugrundeliegenden ökonomischen Faktoren ist. Dies bedeutet, daß

$$V(S, 0) = e^{-rT} E^*(V(S, T)) \quad (1)$$

wobei E^* der Erwartungswert unter dem äquivalenten Martingalmaß (im Falle des Black–Scholes Modells wird die Drift μ durch die risikofreie Zinsrate r ersetzt) ist. An dieser Stelle sei gesagt, daß diese Lösungsdarstellung sehr allgemein ist und auf eine große Klasse von Optionen mit unterschiedlichsten zugrundeliegenden Modellen und Auszahlungsfunktionen angewandt werden kann. Wir wollen zunächst jedoch in der Black–Scholes Welt bleiben.

2.1 Black–Scholes Formel

Im Falle von Europäischen Optionen läßt sich dieser Erwartungswert E^* als folgendes Integral schreiben

$$V(S, 0) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} V(S, T) dx. \quad (2)$$

Mit Formel (7) von Blatt 1 sowie der Submultiplikationseigenschaft der Normalverteilung

$$N(0, t) = \sqrt{t}N(0, 1) (\sim W(t)) \quad (3)$$

gilt dann für Call Optionen

$$V(S, 0) = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \max \left\{ S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}x} - K, 0 \right\} dx. \quad (4)$$

Die Black–Scholes Formel kann nun als exakte Lösung dieses Integrals abgeleitet werden. Sei hierfür χ die Lösung der Gleichung $S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}\chi} - K = 0$, also

$$\chi = \frac{\ln \frac{K}{S(0)} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (5)$$

dann gilt

$$V(S, 0) = e^{-rT} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \left(S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}x} - K \right) dx. \quad (6)$$

Der erste Summand dieses Integranden läßt sich berechnen als

$$e^{-rT} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}x} dx = S(0) \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sigma\sqrt{T}-x)^2} dx = S(0)N(\sigma\sqrt{T} - \chi) \quad (7)$$

und für den zweiten Summanden gilt entsprechend

$$e^{-rT} \int_{\chi}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} K dx = Ke^{-rT}N(-\chi) \quad (8)$$

was genau der Black–Scholes Formel (11)–(13) von Blatt 1 entspricht. Für komplexere Auszahlungsfunktionen (z.B. für viele pfadabhängige Optionen) läßt sich jedoch keine explizite Lösung des entsprechenden Integrationsproblems angeben und es muß hier auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden.

2.2 Transformation

Allerdings ist das Integrationsgebiet die gesamte reelle Zahlengerade (bzw. bei höherdimensionalen Problemen der gesamte reelle Zahlenraum), was für numerische Integrationsverfahren, die meist auf einem endlichen Intervall arbeiten, ein Problem darstellt. Eine Möglichkeit wäre es, das Integrationsgebiet links und rechts an endlichen Punkten abzuschneiden, wodurch natürlich ein zusätzlicher Fehler gemacht wird. Nachdem der Integrand schnell nach $\pm\infty$ (aufgrund der Gewichtung mit der Gauß-Funktion) abfällt, ist dies zwar zulässig, aber geeignete Abschneidepunkte sind a priori schwierig zu bestimmen.

Eine bessere Möglichkeit besteht darin, durch geeignete Variablensubstitution das Integral auf das Einheitsintervall $[0, 1]$ zu transformieren. Die naheliegendste Substitution ist dabei $x = N^{-1}(x)$, d.h. mittels der inversen (kumulativen) Normalverteilung. Damit gilt im Beispiel der Europäischen Call Option aus Formel (4)

$$V(S, 0) = e^{-rT} \int_0^1 \max \left\{ S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}N^{-1}(x)} - K, 0 \right\} dx \quad (9)$$

bzw. unter Zuhilfenahme der Kenntnis der Nullstelle χ

$$V(S, 0) = e^{-rT} \int_{N(\chi)} S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}N^{-1}(x)} - K dx. \quad (10)$$

Die zweite Darstellung hat den Vorteil daß der Integrand glatt (C^∞) ist, während in der ersten Darstellung der Integrand eine unstetige erste Ableitung besitzt (und nur C^0 ist). In beiden Fällen wird die inverse Normalverteilung benötigt, für die wir natürlich ein schnelles Moro-Verfahren verwenden werden:

$E0 = 2.50662823884$	$E1 = -18.61500062529$	$E2 = 41.39119773534$
$E3 = -25.44106049637$	$F0 = -8.47351093090$	$F1 = 23.08336743743$
$F2 = -21.06224101826$	$F3 = 3.13082909833$	$G0 = 0.3374754822726147$
$G1 = 0.9761690190917186$	$G2 = 0.1607979714918209$	$G3 = 0.0276438810333863$
$G4 = 0.0038405729373609$	$G5 = 0.0003951896511919$	$G6 = 0.0000321767881768$
$G7 = 0.0000002888167364$	$G8 = 0.0000003960315187$	
$p = x - 0.5$		
falls $\text{abs}(p) < 0.42$		
$r = p * p$		
$Ninv = p * (((E3 * r + E2) * r + E1) * r + E0) / (((F3 * r + F2) * r + F1) * r + F0) * r + 1.0)$		
sonst		
falls $p < 0$		
$r = x$		
sonst		
$r = 1 - x$		
$r = \log(-\log(r))$		
$r = G0 + r * (G1 + r * (G2 + r * (G3 + r * (G4 + r * (G5 + r * (G6 + r * (G7 + r * G8))))))$		
falls $p < 0$		
$Ninv = -r$		
sonst		
$Ninv = r$		

Algorithmus 5: Berechnung der inversen Normalverteilung mit dem Moro-Verfahren.

3 Einfache Integrationsverfahren

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, müssen bei der Optionspreisbewertung über den Martingalansatz Integrationsprobleme gelöst werden. Wir wollen nun ein paar einfache Quadraturverfahren zur Integration einer Funktion f über das Einheitsintervall $[0, 1]$ der Form

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i) \quad (11)$$

mit entsprechenden Gewichten w_i und Stützstellen x_i angeben. Allgemeinere Intervalle $[a, b]$ (wie in (10)) können durch eine entsprechende lineare Transformation der Quadraturformel

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=1}^N w_i f(a + (b-a)x_i) \quad (12)$$

behandelt werden.

3.1 Monte Carlo

Bei dem Monte Carlo Verfahren wird der Integrand an (gleichverteilt) zufällig ausgewählten Stützstellen ausgewertet und der Integralwert als Mittel der Funktionswerte an diesen Stützstellen berechnet, d.h.

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i). \quad (13)$$

Auf Grund des Gesetzes der großen Zahlen konvergiert das Monte Carlo Verfahren gegen den Integralwert im statistischen Mittel, wenn die Zahl der Stützstellen N gegen ∞ geht. Allerdings ist die Konvergenz nur sehr langsam, nämlich mit Ordnung $\frac{1}{2}$. Dies bedeutet, daß 100-mal mehr Funktionsauswertungen benötigt werden um eine Stelle mehr an Genauigkeit zu erreichen.

3.2 Quasi-Monte Carlo

Bei sogenannten Quasi-Monte Carlo Verfahren wird der Integrand nicht an zufälligen Stützstellen ausgewertet, sondern an deterministischen Stellen und die gleiche Mittelung wie bei Monte Carlo Verfahren angewandt, also wiederum

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i). \quad (14)$$

Hierbei werden als Stützstellen Punktfolgen mit niedriger Diskrepanz, also mit guten Gleichverteilungs-Eigenschaften verwendet. Eine dieser Punktfolgen ist die Van-der-Corput Folge. Hierbei wird das i -te Folgenglied x_i dadurch generiert, daß die Zahl i zur Basis p (wobei p eine Primzahl sein sollte) geschrieben wird, d.h.

$$i = \sum_{k=0}^j d_k p^k, \quad (15)$$

wobei die $d_k \in \{0, \dots, p-1\}$ die j Ziffern der Zahldarstellung sind. Dann ist die Stützstelle x_i definiert als die radikal Inverse (also die Spiegelung am Dezimalpunkt) der Zahl i , also

$$x_i = \sum_{k=0}^j d_k p^{-k-1}. \quad (16)$$

Die ersten Van-der-Corput Folgenglieder zur Basis 3 sind zum Beispiel $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}$. Der entsprechende inkrementelle Algorithmus zur Generierung der Folgenglieder lautet:

$x = 0$ für $i = 1 \dots N$ $z = 1 - x$ $v = 1/p$ während $z < v + EPS$ $v = v/p$ $x = x + (p + 1) * v - 1$

Algorithmus 6: Van-der-Corput Folge zur Basis p .

Hierbei ist EPS eine kleine Zahl, z.B. 10^{-11} . Üblicherweise überspringt man die ersten 500 Folgenglieder. Quasi-Monte Carlo Verfahren haben eine deterministische Konvergenzrate von nahe bei 1.

4 Asiatische Optionen

Asiatischen Optionen liegt die Überlegung zugrunde, daß bei Europäischen Optionen eine Schwäche- (oder Stärke-) Phase des Wertpapiers kurz vor dem Verfalltag einen relativ gesehen zu starken Einfluß auf den Wert der Option hat. Daher wird bei diesen Optionen der Ausübungspreis nicht mit dem Preis des Wertpapiers zum Verfalltag, sondern mit dem mittleren Preis des Wertpapiers über die gesamte Lebenszeit der Option verglichen.

4.1 Diskrete Mittel

Im Falle einer diskreten Mittelung über endlich viele Zeitpunkte wird eine Asiatische Call Option durch eine Auszahlungsfunktion der Art

$$V(S, T) = \max \left\{ \frac{1}{M} \left(\sum_{i=1}^M S(t_i) \right) - K, 0 \right\} \tag{17}$$

im Falle eines diskreten arithmetischen Mittels und

$$V(S, T) = \max \left\{ \left(\prod_{i=1}^M S(t_i) \right)^{1/M} - K, 0 \right\} \tag{18}$$

für ein diskretes geometrisches Mittel realisiert. Im Falle des diskreten geometrischen Mittels läßt sich der faire Preis der Asiatischen Option in Form einer verallgemeinerten Black-Scholes Formel herleiten. Sie lautet in diesem Fall

$$V(S, 0) = S(0) \cdot A \cdot N(d + \sigma \sqrt{T_1}) - K e^{-rT} N(d) \tag{19}$$

$$A = e^{-r(T-T_2) - \sigma^2(T_2-T_1)/2} \tag{20}$$

$$d = \frac{\ln(S(0)/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T_2}{\sigma \sqrt{T_1}} \tag{21}$$

$$T_1 = T - \frac{M(M-1)(4M+1)T}{6M^3} \tag{22}$$

$$T_2 = T - \frac{(M-1)T}{2M} \tag{23}$$

Für das diskrete arithmetische Mittel oder andere Mittelungsverfahren läßt sich jedoch keine geschlossene Lösung angeben.

4.2 Kontinuierliche Mittel

Wenn die Zahl der Mittelungszeitpunkte sehr groß wird, können stattdessen auch entsprechende kontinuierliche Mittel betrachtet werden. Im Falle des kontinuierlichen arithmetischen Mittels bedeutet dies eine Auszahlungsfunktion von

$$V(S, T) = \max \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt - K, 0 \right\}. \tag{24}$$

und für das kontinuierliche geometrische Mittel gilt

$$V(S, T) = \max \left\{ e^{\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S(t)) dt\right)} - K, 0 \right\}. \quad (25)$$

Eine Verallgemeinerung der Black-Scholes Formel existiert auch für das kontinuierliche geometrische Mittel. Sie lautet dann

$$V(S, 0) = S e^{-\frac{1}{2}(r + \frac{1}{6}\sigma^2)T} N(d + \sigma\sqrt{T/3}) - K e^{-rT} N(d) \quad (26)$$

$$d = \frac{\ln(S(0)/K) + \frac{1}{2}(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T/3}} \quad (27)$$

Auch hier lässt sich für das kontinuierliche arithmetische Mittel oder andere Mittel keine einfache Bewertungsformel angeben. Oft wird daher versucht, das arithmetische Mittel durch geometrische Mittel zu approximieren oder zumindest das Monte Carlo Verfahren durch entsprechende Kontrollvariante zu beschleunigen.

5 Simulation von Asiatischen Optionen

Für Asiatische Optionen aber auch für andere pfadahängige Optionen, wie z.B. Barrier Optionen oder Lookback Optionen, ist es nötig den zukünftigen Pfad des Wertpapiers zu simulieren.

5.1 Random Walk

Auf Blatt 1 wurde bereits hergeleitet, dass im Black-Scholes Modell der Wert der Aktie zum Zeitpunkt t_j durch

$$S(t_j) = S(0)e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t_j + \sigma W(t_j)} \quad (28)$$

gegeben ist. Die Diskretisierung des Wiener Prozess $W(t)$ erfolgt im einfachsten Fall durch einen Zufallspfad (Random Walk), der über die Beziehung

$$W(t_j + \Delta t) = W(t_j) + \sqrt{\Delta t} z_j \quad (29)$$

für $j = 0 \dots M - 1$ definiert ist, wobei z_j $N(0, 1)$ -normalverteilte Zufallsvariablen sind und $W(0) = 0$ gilt. Solche Zufallsvariablen können durch $[0, 1]$ -gleichverteilte im Rechner generierte Pseudo-Zufallszahlen und durch entsprechende Transformation mit der inversen Normalverteilung ermittelt werden.

Soll zur Simulation ein Quasi-Monte Carlo Verfahren eingesetzt werden, müssen statt der Zufallsvariablen entsprechende Van-der-Corput Folgendglieder verwendet werden. Nachdem diese Folgendglieder stark korrelieren, werden für verschiedene Zeitpunkte t_j Van-der-Corput Folgen mit unterschiedlichen Primzahlbasen verwendet. Setzt man hierbei die ersten M Primzahlen $(2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ ein, so nennt man die so entstehende Folge von Vektoren Halton-Folge. Die ersten Glieder der zweidimensionalen Halton-Folge lauten $(0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{4}, \frac{2}{3}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{9}), (\frac{1}{8}, \frac{4}{9})$.

Damit lässt sich der Optionspreis durch folgenden Algorithmus näherungsweise bestimmen:

```

Setze  $y = 0$ 
für  $i = 1 \dots N$ 
  für  $j = 1 \dots M$ 
    Ziehe eine  $[0, 1]$  gleichverteilte Zufallsvariable  $x_j$ 
    Transformiere die Zufallsvariable über die inverse Normalverteilung:  $z_j = N^{-1}(x_j)$ 
    Berechne den Wertpapierkurs  $S(t_j)$  aus Formel (28) und (29)
  Ermittle aus den simulierten Kursen den Wert der Option  $V(S, T)$ 
  Setze  $y = y + V(S, T)$ 
Der Optionspreis ist dann das arithmetische Mittel nach Diskontierung:  $V(S, 0) = e^{-rT} y / N$ 

```

Algorithmus 7: Optionspreisbewertung durch Simulation.

5.2 Brownsche Brücke

Alternativ läßt sich der Pfad des Wertpapiers hierarchisch über die sogenannte Brownsche Brücke diskretisieren. Hierbei wird der Wert des Wiener Prozess nicht nur durch den jeweils vorhergehenden Wert inkrementell erzeugt, sondern durch einen vorhergehenden und einen zukünftigen Wert, d.h.

$$W(t_j + \Delta t) = \frac{1}{2} (W(t_j) + W(t_j + 2\Delta t)) + \sqrt{\Delta t/2} z_j. \quad (30)$$

Auf diese Weise wird erst der Kurs zum Zeitpunkt T auf normale Art und Weise mittels Formel (28) und $W(T) = \sqrt{T}z$ ermittelt. Dann berechnet man $W(T/2)$ aus $W(0)$ und $W(T)$ und damit $S(T/2)$, daraufhin $W(T/4)$ aus $W(0)$ und $W(T/2)$ und damit $S(T/4)$, dann $W(3T/4)$ aus $W(T/2)$ und $W(T)$ und damit $S(3T/4)$, und so weiter. Hierbei wollen wir der Einfachheit annehmen, daß M eine Potenz von 2 ist.

Der Vorteil dieser Konstruktion ist, daß nun die Varianz der Zufallsvariablen unterschiedlich groß ist. Während die ersten Verfeinerungsstufen größere Varianz aufweisen als bei der Random Walk Diskretisierung, ist sie bei den feineren Stufen kleiner. Natürlich ist die Gesamtvarianz in beiden Fällen gleich groß. Allerdings können numerische Verfahren diesen Abfall der Varianz ausnutzen und die verschiedenen Zeitpunkte unterschiedlich gewichten. Im Falle der Quasi-Monte Carlo Methode führt die Brownsche Brücke zu einer Beschleunigung der Konvergenz, da die Komponenten der Halton-Folge für niedrige Primzahlen bessere Gleichverteilungseigenschaften haben als für die höheren Primzahlen. Aus diesem Grund werden auch anstelle der Halton Folge andere Punktfolgen mit besserer Diskrepanz, wie die Faure- oder die Sobol-Folge eingesetzt.

6 Simulation von Amerikanischen Optionen

Um das Aufgabenblatt abzurunden, wollen wir nun einen Simulationsalgorithmus zur Bewertung von Amerikanischen Optionen betrachten. Dieses Verfahren geht auf Broadie und Glasserman (1996) zurück und wird auch Stochastic Mesh Methode genannt. Nachdem bei Amerikanischen Optionen ein vorzeitiges Ausübungsrecht besteht, ist der Preis dieser Optionen über folgenden Erwartungswert

$$V(S, 0) = \sup_{t \leq T} e^{-rt} E^*(V(S, t)) \quad (31)$$

definiert. Der Broadie-Glasserman Algorithmus erzeugt nun zwei Erwartungswerte für den Optionspreis, einen mit zu hohem Bias und einem mit zu niedrigem Bias. Beide Erwartungswerte besitzen jedoch asymptotisch wenn die Zahl der Simulationen nach ∞ strebt keinen Bias. Diese beiden Erwartungswerte dienen als Konfidenzintervall für den Optionspreis.

Zunächst wird ein Zufallsbaum mit B Zweigen pro Knoten konstruiert (siehe Abbildung 1) wobei die Wertpapierpreise zu den Zeitpunkten t_j mit $S_j^{i_1, i_2, \dots, i_j}$, $j = 1, 2, \dots, M$ und $1 \leq i_1 \dots i_j \leq B$ bezeichnet werden. Diese Wertpapierpreise werden in einem Vorwärtsschritt wie in Abschnitt 5.1 als Random Walk

$$S_{j+1}^{i_1, i_2, \dots, i_{j+1}} = S_j^{i_1, i_2, \dots, i_j} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} z_{i_{j+1}}}$$

für $i_{j+1} = 1, \dots, B$ simuliert. Hierbei ist $z_{i_{j+1}}$ eine $N(0, 1)$ - verteilte Zufallsvariable.

In einem Rückwärtsschritt wird nun (in ähnlicher Weise wie bei der Binomialmethode) zu jedem Knoten i_1, i_2, \dots, i_j zum Zeitpunkt t_j der zu hohe Erwartungswert $\theta_{high, j}^{i_1, i_2, \dots, i_j}$ und der zu niedrige Erwartungswert $\theta_{low, j}^{i_1, i_2, \dots, i_j}$ aus den Werten des Zeitpunktes t_{j+1} berechnet. Zum Fälligkeitszeitpunkt $j = M$ gilt im Fall einer Call Option, dass

$$\theta_{high, M}^{i_1, \dots, i_M} = \theta_{low, M}^{i_1, \dots, i_M} = (S_M^{i_1, \dots, i_M} - K)^+. \quad (32)$$

Aus diesen Werten bestimmt man nun rekursiv für $j = M - 1, \dots, 0$ den zu hohen Erwartungswert durch

$$\theta_{high, j}^{i_1, \dots, i_j} = \max \left\{ (S_j^{i_1, \dots, i_j} - K)^+, e^{-r\Delta t} \frac{1}{B} \sum_{i_{j+1}=1}^B \theta_{high, j+1}^{i_1, \dots, i_j, i_{j+1}} \right\} \quad (33)$$

und den zu niedrigen Erwartungswert durch

$$\theta_{low, j}^{i_1, \dots, i_j} = \frac{1}{B} \sum_{k=1}^B \eta_j^{i_1, \dots, i_j, k}. \quad (34)$$

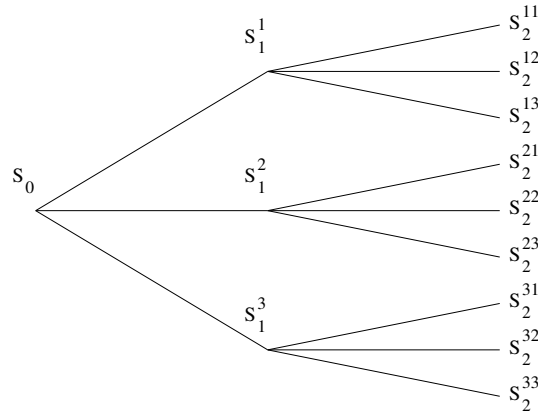


Abbildung 1: Simulationsbaum mit drei Zweigen und zwei Zeitschritten.

Hierbei bestimmt man $\eta_j^{i_1, \dots, i_j, k}$ für $k = 1, \dots, B$ mittels

$$\eta_j^{i_1, \dots, i_j, k} = \begin{cases} (S_j^{i_1, \dots, i_j} - K)^+ & \text{falls } (S_j^{i_1, \dots, i_j} - K)^+ \geq \frac{1}{B-1} \sum_{\substack{i_{j+1}=1 \\ i_{j+1} \neq k}}^B e^{-r\Delta t} \theta_{low, j+1}^{i_1, \dots, i_j, i_{j+1}} \\ e^{-r\Delta t} \theta_{low, j+1}^{i_1, \dots, i_j, k} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (35)$$

Der Optionspreis zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ und Kurs S_0 beträgt dann

$$V(S_0, 0) = \frac{1}{2} (\theta_{high, 0} + \theta_{low, 0}). \quad (36)$$

Die Bewertung einer Amerikanischen Put Option verläuft analog, indem man in den Formeln (32), (33) und (35) die Auszahlung $(S_j^{i_1, \dots, i_j} - K)^+$ durch $(K - S_j^{i_1, \dots, i_j})^+$ ersetzt. Auf den ersten Blick sieht das Broadie–Glasserman Verfahren erheblich komplizierter aus als das Binomialverfahren, das praktisch das gleiche Problem löst. Der Vorteil des Broadie–Glasserman Verfahrens liegt in der viel leichteren Generalisierbarkeit auf allgemeinere Optionstypen, wie pfadabhängige Optionen oder Optionen auf mehrere Wertpapiere.

7 Implementierung

Schreiben Sie die folgenden Programme in einer gängigen Programmiersprache.

- **INVNOR(x)**: Die Berechnung der inversen Normalverteilung $N^{-1}(x)$ nach dem Moro Verfahren (Algorithmus 5).
- **BLACK_SCHOLES_ASIA(M, S0, K, T, sigma, r)**: Die verallgemeinerte Black–Scholes Formel für Asiatische Call Optionen mit diskretem geometrischem Mittel für M Zeitpunkte (Formel (19)–(23)) und (für $M = 0$) für kontinuierliche geometrische Mittel (Formel (26)–(27)).
- **MONTE_CARLO(N, M, S0, K, T, sigma, r, Call, Walk, Geom)**: Das Monte Carlo Verfahren mit N Punkten zur Berechnung einer Europäischen Call (Call=1 und $M = 1$) bzw. Put Option (Call=0 und $M = 1$) oder einer Asiatischen Call (Call=1) bzw. Put Option (Call=0) mit $M > 1$ Zeitschritten nach Algorithmus 7. Verwenden Sie bei Geom=0 die Auszahlungsfunktion (17) und bei Geom=1 die Auszahlungsfunktion (18). Ausserdem soll für Walk=1 die Random Walk Diskretisierung und für Walk=0 die Brownsche Brücke verwendet werden.
- **QUASI_MONTE_CARLO(N, M, S0, K, T, sigma, r, Call, Walk, Geom)**: Das entsprechende Quasi–Monte Carlo Verfahren. Hierbei soll im Fall der Europäischen Option die Van–Der–Corput Folge (Algorithmus 6) zur Basis 2 und im Fall von Asiatischen Optionen die Halton Folge mit den ersten M Primzahlen als Basis verwendet werden.

- `BROADIE_GLASSERMAN(B, M, SO, K, T, sigma, r, Call)`: Das Broadie–Glasserman Verfahren (31)–(36) mit B Zweigen und N Zeitschritten zur Berechnung einer Europäischen oder Amerikanischen Call ($\text{Call}=1$) oder Put ($\text{Call}=0$) Option.

Überprüfen Sie die Korrektheit Ihrer Programme anhand einiger selbstgewählter Beispiele. Mittlerweile haben Sie ja eine Menge an Verfahren zum Kreuz–Überprüfung der Ergebnisse.

8 Beispiele

Alle Aufgabenlösungen müssen wieder schriftlich in elektronischer Form (als PDF Datei) abgegeben werden. Schicken sie die Lösung wieder per e–mail ein (`noll@math.uni-frankfurt.de`).

Führen Sie mit den Programmen folgende Beispielrechnungen durch:

- Berechnen Sie Optionspreise für jeweils eine Europäische Call und Put Option mit Fälligkeit $T = 1$, Ausübungspreis $K = 10$ Eur, Volatilität $\sigma = 0.6$ und Zinsrate $r = 0.025$ für den Kurs $S(0) = 10$ Eur mit dem Monte Carlo und den Quasi–Monte Carlo Verfahren (hierbei ist $M = 1$). Wählen Sie dabei $N = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ und 1024 . Plotten sie für die Call Option den Aufwand (N) gegen den Fehler (Betrag der Differenz zum Black–Scholes Preis) in einen log–log Plot und bestimmen Sie jeweils die Konvergenzrate.
- Berechnen Sie den Preis einer Asiatischen Call Option mit den Parametern aus Aufgabe 1 mit diskretem ($M = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$) und kontinuierlichen geometrischen Mittel ($M = 0$) nach der verallgemeinerten Black–Scholes Formel. Plotten sie den Betrag der Differenz zwischen den beiden Preisen gegen den Aufwand (M) in einen log–log Plot.
- Ermitteln Sie nun die Preise einer Asiatischen Call Option mit geometrischen Mittel und den Parametern aus Aufgabe 1 mit dem Monte Carlo und dem Quasi–Monte Carlo Verfahren sowohl für die Random Walk Diskretisierung als auch die Brownsche Brücke für $M = 16$ und N wie in Beispiel 1. Zeichnen Sie wiederum den Aufwand (hier $N \cdot M$) gegen den Fehler in einen log–log Plot und vergleichen Sie die Konvergenzraten. Vergleichen Sie ausserdem die Preise einer Asiatischen Call Option mit geometrischen Mittel mit den Preisen einer Asiatischen Call Option mit arithmetischem Mittel.
- Berechnen Sie die Preise einer Amerikanischen Call und einer Amerikanischen Put Option mit den Parametern aus Aufgabe 1 mit dem Broadie–Glasserman Algorithmus für $B = 2$ und $M = 2, 4, 8$ und 16 . Vergleichen Sie die berechneten Preise mit den Preisen aus dem Binomialverfahren.

Literatur

- [1] P. Acworth, M. Broadie and P. Glasserman, A comparison of some Monte Carlo and Quasi Monte Carlo methods for option pricing, in *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 1996*, H. Niederreiter et al., (eds.), pp. 1–18, Springer, 1998.
- [2] M. Broadie, P. Glasserman, Pricing American–style securities using simulation, *Journal of Economic Dynamics and Control* 21:1323–1352, 1997.
- [3] R.E. Caflisch, W.J. Morokoff and A. Owen. Valuation of mortgage backed securities using Brownian bridges to reduce effective dimension *Journal on Computational Finance*, 1, 1997.
- [4] B. Moro. The full Monte, *RISK*, 8(2), 1995.
- [5] P. Zhang. Exotic Options, *World Scientific Publishing*, 1998.