GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Monte Carlo Methoden
SS 2014
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 5

Abgabe bis Mittwoch, 2.7.

Aufgabe 10: [Antithetische Variate]

(a) Betrachten Sie einen d-dimensionalen Zufallsvektor X, der symmetrisch verteilt bezüglich $\mu \in \mathbb{R}^d$ ist, und eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, so dass $f(X)$ quadratisch integrierbar ist. Zeigen Sie

$$\sigma^2(\tilde{Y}) < \frac{1}{2}\sigma^2(Y) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Cov}(f(X), f(2\mu - X)) < 0$$

für die Zufallsvariablen $Y = f(X)$ und $\tilde{Y} = f_g(X)$.

(b) Zeigen Sie ferner, dass im Falle $d = 1$ die strenge Monotonie von f hinreichend für $\sigma^2(\tilde{Y}) < \frac{1}{2}\sigma^2(Y)$ ist.

Punkte: $\boxed{10}$

Aufgabe 11: [Antithetische Variate]

Betrachten Sie für $\alpha \in \,]1/2, 1[$ die quadratisch integrierbare Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1} \cdot \exp(-x), & \text{für } \; x \in \,]0,1] \\ 0, & \text{für } \; x = 0, \end{cases}$$

die Singularität in $x = 0$ besitzt, und für deren Integral keine explizite Formel bekannt ist.

(a) Zeigen Sie, dass für auf $[0, 1]$ gleichverteiltes X, gilt

$$\sigma^2(f(X)) \leq \frac{1}{2\alpha - 1}$$

und

$$\sigma^2(f_g(X)) \geq \frac{\exp(-2)}{2 \cdot (2\alpha - 1)} - \frac{1}{\alpha^2}.$$

(b) Ist für Werte von α nahe bei $1/2$ antithetisches Sampling sinnvoll?

Punkte: $\boxed{8}$

Aufgabe 12: [Stratified Sampling]

Bei der praktischen Durchführung der Methode M_n^{prop} des Stratfied Sampling mit proportionalen Wiederholungsanzahlen betrachten wir das Verfahren

$$M_n^{prop} = \sum_{j=1}^{m} \left(p_j \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n_j} f(X_i^{(j)}) \right)$$

mit $n_j = [p_j \cdot n]$ für $j = 1, \ldots, m$.

(a) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot \sigma_j^2}} \cdot (M_n^{prop} - a)$$

asymptotisch standard-normalverteilt sind.
Hinweis: Benutzen Sie die Tatsache, dass aus der Verteilungskonvergenz von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen X und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Y die Verteilungskonvergenz von $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $X + Y$ folgt, falls X und Y sowie für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch X_n und Y_n unabhängig sind.

(b) Konstruieren Sie asymptotische Konvergenzintervalle der Form

$$[M_n^{prop} - L_n, M_n^{prop} + L_n]$$

zum Niveau $1 - \delta$ für a.

Punkte: $\boxed{10}$

Gesamtpunktzahl: 28 Punkte