11. Übungsblatt zur Vorlesung
Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Aufgabe 11.1 (Poisson-Gleichung)

Auf dem Rechteck $0 < x < a,\ 0 < y < b$ mit $a = b = \frac{1}{2}$ löse $u(x, y)$ das Poisson-Problem

$$u_{xx} + u_{yy} = 0\,, \quad \text{mit den Randbedingungen}$$
$$u(0, y) = u(x, 0) = 0\,, \quad u(x, b) = 200x\,, \quad u(a, y) = 200y\,.$$

Für die Diskretisierung mit "5-Punkte-Stern" auf dem Gitter

$$m = n = 4, \quad x_i = i\frac{a}{m},\ y_j = j\frac{b}{n}, \quad i = 1, \ldots, m-1,\ j = 1, \ldots, n-1$$

stelle man für das Gleichungssystem $Aw = v$ die Matrix A und den Vektor v der rechten Seite auf.

(6 Punkte)

Aufgabe 11.2 (Gemischte Ableitung)

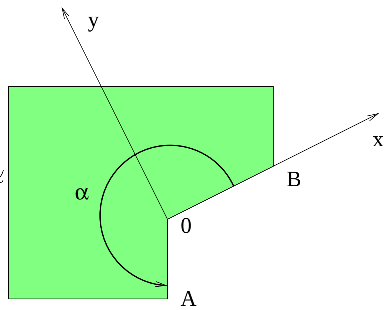
Man gebe eine finite Differenzen-Diskretisierung an von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$$

Verwende hierzu konstante Gitterweiten Δx und Δy. Man gebe die Ordnung an.

(3 Punkte)

Aufgabe 11.3 (Einspringende Ecke)



Gegeben sei die Laplace-Gleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ auf einem Gebiet mit einer einspringender Ecke, die durch den Winkel α charakterisiert wird. (Konstellation z.B. wie in der Figur). Um eine Darstellung der Lösung *in einer Umgebung um* 0 zu erhalten, führt man um 0 lokal Polarkoordinaten (r, θ) ein.

a) Zeige, dass die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten folgende Form hat:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$$

b) Zeige mithilfe des Separationsansatzes, dass sich die Lösung aus folgenden Termen zusammensetzt:

$$r^c \cos(c\theta) \quad \text{und} \quad r^c \sin(c\theta) \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}$$

c) Für das Randstück A → 0 → B sei die Randbedingung $u = 0$ vorgegeben. Welche Werte nimmt dann c an? Und wie verhält sich für diese c der Faktor r^c für $r \approx 0$?

(5 Punkte)