GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Elementare Angewandte Mathematik
WS 2013/2014
Prof. Dr. Thomas Gerstner

Übung 10

Abgabe bis Mittwoch, 15.01.2014

Aufgabe 1:
Formulieren Sie die folgenden Aussagen in natürlicher Sprache und verneinen Sie diese zusätzlich. Ist die jeweilige Aussage wahr oder falsch?

(a) $\forall\ (x, y) \in \mathbb{N}^2\ \exists\ z \in \mathbb{N}\colon x * z = y$

(b) $\forall\ (x, y) \in \mathbb{N}^2\ \exists\ z \in \mathbb{N}\colon x * z > y$

Punkte: $\boxed{2/2}$

Aufgabe 2:
Wir betrachten drei Teilmengen X, Y und Z der natürlichen Zahlen. Formulieren Sie die folgenden Aussagen in mathematischer Sprache mit Hilfe von Junktoren. Verwenden Sie dazu keine Wörter.

(a) "Alle Elemente x der Menge X sind gerade."

(b) "Alle Elemente y der Menge Y sind Quadratzahlen."

(c) "Für alle Elemente x aus der Menge X gibt es mindestens ein Element y aus der Menge Y, sodass $x * y < z$ für alle Elemente z aus der Menge Z gilt."

Punkte: $\boxed{2/2/3}$

Aufgabe 3:
Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit jeweils einer Ihnen aus der Vorlesung bekannten Beweistechnik.

(a) Wenn eine ganze Zahl durch 10 teilbar ist, dann ist sie auch durch 5 teilbar.

(b) Wenn a^2 eine ungerade Zahl ist, dann ist a ungerade.

(c) Wenn a und b gerade Zahlen sind, dann ist auch $a * b$ eine gerade Zahl.

Hinweis: Eine ganze Zahl a ist durch eine ganze Zahl b teilbar, wenn es eine ganze Zahl k gibt mit $a = b * k$.

Punkte: $\boxed{3/4/4}$

Aufgabe 4:
Zeigen sie, dass für zwei Aussagen A und B gilt

(a) $(A \wedge (A \Longrightarrow B)) \Longrightarrow B$

(b) $(\neg B \wedge (A \Longrightarrow B)) \Longrightarrow \neg A$

Wie lassen sich diese Implikationen als Beweistechniken interpretieren (mit Begründung)?

Punkte: $\boxed{2/3}$

Aufgabe 5:
Der Einzelquantor $\exists!$ ist folgendermaßen definiert: $\exists! x : A(x)$ bedeutet: es existiert genau ein x, für das die Aussageform $A(x)$ wahr ist.

Welche Interpretation hat die Verneinung $\neg(\exists! x : A(x))$? Nehmen sie hierzu eine Fallunterscheidung vor.

Punkte: $\boxed{3}$

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte