9. Übungsblatt zur Vorlesung
Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Aufgabe 9.1 (Kollokationsverfahren)

Man betrachte das Kollokations/Runge-Kutta-Verfahren *Gauß4*: Mit der Lösung f^1, f^2 des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} f^1 &= f\left(t_j + (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6})h,\ w_j + h\left[\frac{1}{4}f^1 + (\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6})f^2\right]\right) \\ f^2 &= f\left(t_j + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})h,\ w_j + h\left[(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6})f^1 + \frac{1}{4}f^2\right]\right) \end{aligned}$$

setzt man $w_{j+1} = w_j + h\frac{1}{2}(f^1 + f^2)$.

a) Zeigen Sie: Anwendung auf die skalare Testgleichung $y' = \mu y$, μ komplex, ergibt

$$w_{j+1} = R(h\mu)\, w_j \quad \text{wobei } R(z) := \frac{1 + z/2 + z^2/12}{1 - z/2 + z^2/12}\,.$$

b) Zeigen Sie: Es gilt $\mathrm{e}^z - R(z) = O(z^5)$ für $z \to 0$, also ist R eine rationale Approximation der Exponentialfunktion.

(6 Punkte)

Aufgabe 9.2 (Rekursion für das Mehrzielverfahren)

Das Mehrzielverfahren ermittelt eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} G_1 & -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & G_2 & -I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & G_{m-2} & -I \\ A & 0 & \cdots & 0 & \tilde{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta s_1 \\ \vdots \\ \Delta s_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{m-1} \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{B} := BG_{m-1}$, $\Delta s_i \in \mathbb{R}^n$, $r_i \in \mathbb{R}^n$ für $i = 1, \ldots, m-1$, wie in der Vorlesung.

a) Leiten Sie eine Rekursion her, mit der die Vektoren $\Delta s_2, \ldots, \Delta s_{m-1}$ aus Δs_1 berechnet werden können.

b) Formulieren Sie ein lineares Gleichungssystem für Δs_1.

(6 Punkte)