8. Übungsblatt zur Vorlesung
Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Aufgabe 8.1 (Steifes System aus einer partiellen Differentialgleichung)

Für eine Funktion $u(t,x)$, $a \leq x \leq b$, $t \geq 0$, gelte $u(t,a) = u(t,b) = 0$ und

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Das x–Intervall wird äquidistant diskretisiert: $\Delta x := \frac{b-a}{N}$, $x_k := a + k\Delta x$ für $k = 0, \ldots, N$.

a) Man zeige

$$\frac{\partial u(t,x_k)}{\partial t} = \frac{\alpha^2}{\Delta x^2}(u(t,x_{k-1}) - 2u(t,x_k) + u(t,x_{k+1})) + O(\Delta x^2)$$

("Semi–Diskretisierung" einer partiellen Differentialgleichung)

b) Es sei $y_k(t)$ eine Näherung zu $u(t,x_k)$. Begründe das lineare System gewöhnlicher Differentialgleichungen vom Typ $\dot{y} = Ay$

$$\dot{y} = \frac{\alpha^2}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -2 \end{pmatrix} y$$

c) Ist das System steif? Wie hängt die Steifheit von Δx ab?
Hinweis: Die Eigenwerte von A sind

$$\mu_k = -4\frac{\alpha^2}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2(N+1)} \qquad \text{für } k = 1, ..., N$$

(6 Punkte)

Aufgabe 8.2 (Steifheit eines nichtlinearen Systems)

Betrachten Sie das nichtlineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -0.1\, y_1 + 100\, y_2\, y_3 \\ \dot{y}_2 &= 0.1\, y_1 - 100\, y_2\, y_3 - 500\, y_2^2 \\ \dot{y}_3 &= 500\, y_2^2 - 0.5\, y_3 \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $y_1(0) = 4$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 0.5$.

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $f_y(y)$ des Systems.

b) Untersuchen Sie die Differentialgleichung zur Zeit $t = 0$ auf Steifheit und berechnen Sie das Steifheitsmaß.

(6 Punkte)