

Übung 8

Abgabe bis Mittwoch, 11.12.2013

Aufgabe 1:

Ein Computer rechnet mit 15-stelliger Genauigkeit. Es sei $f(x) = x^{-1}$, $a = 13457$ und $b = 13457.016$.

- Der Computer berechnet $f(a) = 7.43107676302296 \cdot 10^{-5}$ und $f(b) = 7.43106792768917 \cdot 10^{-5}$. In wievielen signifikanten Stellen stimmen $f(a)$ und $f(b)$ überein? (3.2 und 2.7 stimmen beispielsweise in der ersten Stelle überein)
- Berechnen sie $f(a) - f(b)$ exakt.
- Der Computer berechnet $f(a) - f(b) = 8.83533379108809 \cdot 10^{-11}$. Wieviele von diesen Stellen sind nicht durch das Ergebnis aus Aufgabe b) gedeckt?
- Wie kann man $f(x) - f(x + \varepsilon)$ algebraisch umformen, um Auslöschung bei kleinem ε zu vermeiden?

Punkte:

Aufgabe 2:

Im folgenden werden zwei unterschiedliche Verfahren mit jeweils 8-Stellen Genauigkeit verwendet um drei Zahlen a, b, c zu addieren. Verfahren 1 verwendet Algorithmus 1: $f_1(a, b, c) = (a+b)+c$. Verfahren 2 verwendet Algorithmus 2: $f_2(a, b, c) = a+(b+c)$. Als Beispieldaten werden $a = 2.4378567 \cdot 10^{-5}$, $b = 3.1783982 \cdot 10^1$ und $c = -3.1839234 \cdot 10^1$ verwendet.

- Berechnen sie $a + b + c$ mit Verfahren 1, sowie mit Verfahren 2.
- Bestimmen sie den absoluten und relativen Rundungsfehler beider Verfahren mit den Werten aus Aufgabenteil a).
- Für welche Werte a, b, c würden sie Verfahren 1 empfehlen? Wann wäre die Verwendung von Verfahren 2 empfehlenswert? (Mit Begründung)

Punkte:

Aufgabe 3:

Ein etwas primitiver Rechner stellt reelle Zahlen im Festkommaformat mit einem Byte dar. Dabei werden 1 Vorzeichen-Bit, 4 Bits vor dem Komma und 3 Bits hinter dem Komma verwendet. Nicht exakt darstellbare Zahlen werden auf die nächste darstellbare Zahl gerundet.

- Geben sie den absoluten und den relativen Rundungsfehler bei der Darstellung der Zahlen $2/3$ und $1/6$ an.
- Bestimmen sie den maximalen absoluten und relativen Rundungsfehler für reelle Zahlen im Bereich $[x_{\min}, x_{\max}]$.

Punkte:

Aufgabe 4:

- Zeigen sie, dass die folgenden Ausdrücke mathematisch gleichbedeutend sind:

- $((a + b)(a - b))^2$
- $(a^2 + b^2)^2 - 4(ab)^2$
- $(a^2 - b^2)^2$

- Seien nun $a = 10^6 + 2$ und $b = 10^6 - 1$. Berechnen sie obige Ausdrücke mit 10 Dezimalstellen. Runden sie dabei nach jedem Rechenschritt das Teilergebnis.
- Berechnen sie jeweils den relativen Fehler der Resultate aus Aufgabe b) (2 gültige Ziffern genügen). Was ist der Grund für dieses Verhalten?

Punkte: