6. Übungsblatt zur Vorlesung
Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Aufgabe 6.1 (Explizite Runge-Kutta-Verfahren für lineare Differentialgleichungen)
Es sei $y : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = Ay(t), \quad y(0) = y_0$$

mit einer beliebigen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Zeigen Sie, dass jedes explizite s-stufige Runge-Kutta-Verfahren mit konstanter Schrittweite $h > 0$ als eine Rekursion

$$x_{n+1} = Bx_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

geschrieben werden kann, wobei $B = q(hA)$ und q ein Polynom höchstens vom Grad s ist.

b) Nennen Sie die Polynome q_E und q_H, die zum Euler- und zum "Heun-Verfahren" gehören. Erkennen Sie ein Bildungsgesetz? Setzen Sie dieses Gesetz in Beziehung zu Ihnen bekannten Fakten über lineare Differentialgleichungen.

(5 Punkte)

Aufgabe 6.2 (Mehrschrittverfahren)
Gegeben sei das Mehrschrittverfahren

$$w_{j+1} - w_{j-3} = \frac{h}{3}\left(8f_j - 4f_{j-1} + 8f_{j-2}\right).$$

wobei $f_j := f(t_j, w_j)$.

a) Bestimmen Sie die (maximle) Ordnung des Verfahrens und geben Sie den führenden Fehlerterm des lokalen Diskretisierungsfehlers an.

b) Ist das Verfahren nullstabil?

(4 Punkte)

Aufgabe 6.3 (Konsistenz bei Mehrschrittverfahren)
Zeigen Sie: Ein lineares Mehrschrittverfahren mit erstem charakteristischen Polynom ρ und zweitem charakteristischen Polynom σ ist genau dann konsistent, wenn die beiden Bedingungen

$$\rho(1) = 0 \quad \text{und} \quad \rho'(1) = \sigma(1)$$

erfüllt sind.

(3 Punkte)