1. Übungsblatt zur Vorlesung
Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Zur Organisation der Übungen: Die Abgabe-Modalität zu diesem Blatt wird in der Vorlesung bekannt gegeben. Zukünftige Programmier-Aufgaben sind inklusive Programmcode und (Scilab-)Ausgabe in Papierform abzugeben. Der Programmcode ist der Tutorin Miriam Berrada noch einmal separat per Mail zuzuschicken.

Definition. (Landau-Symbol) *Es seien $p \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$. Man sagt, dass $\varphi \in \mathcal{O}(|x-a|^p)$ für $x \to a$, falls ein $C > 0$ und ein $\varepsilon > 0$ existieren, sodass $|\varphi(x)| \leq C|x-a|^p$ für alle $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.*

Bei der Diskussion von Fehlern in Abhängigkeit von einer Schrittweite $h > 0$ verwendet man Landau-Symbole häufig in der folgenden Form: Man sagt, dass $\varphi \in \mathcal{O}(h^p)$, falls ein $C > 0$ und ein $h_0 > 0$ existieren, sodass $|\varphi(h)| \leq Ch^p$ für alle $h \in [0, h_0)$. Dabei ist immer der Limes $h \to 0$ gemeint.

Aufgabe 1.1 (Landau-Symbole)

a) Vereinfachen Sie die Ausdrücke $\mathcal{O}(h^p) \pm \mathcal{O}(h^q)$, $\mathcal{O}(h^p) \cdot \mathcal{O}(h^q)$ und $\mathcal{O}(h^p)/h^q$ für $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p \geq q$ inklusive sauberer Rechnung.

b) Zeigen Sie, dass für $\varphi \in \mathcal{O}(h^p)$ und $\psi(h) := Ch^q$ mit $p > q$ und $C > 0$ ein $h^* > 0$ existiert, sodass $|\varphi(h)| < \psi(h)$ für alle $h \in (0, h^*)$ gilt.

c) Illustrieren Sie die Aussage von b) durch eine einfache Beispielfunktion φ und plotten Sie φ und ψ in eine Grafik (z.B. mit Hilfe von Scilab).

(6 Punkte)

Fakt. (Taylor-Reihen) Für $f \in C^{n+1}([0,T],\mathbb{R})$ und $a \in [0,T]$ gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Der Sinn einer Taylor-Reihe ist die Approximation einer möglicherweise komplizierten Funktion f in der Nähe des Punktes a durch ein Polynom.

Aufgabe 1.2 (Taylor-Reihen)

a) Zeigen Sie, dass für $f \in C^{n+1}([0,T],\mathbb{R})$ die Aussage

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathcal{O}(|x-a|^{n+1})$$

in einer Umgebung von $a \in (0,T)$ gilt.

b) Bestimmen Sie anhand von a) eine $\mathcal{O}(|x-a|^3)$-Taylor-Approximation g der Funktion $f(x) = xe^x$ in einer Umgebung von $a = -1$.

c) Plotten Sie f und g in eine Grafik. Ermitteln Sie durch Ausprobieren ein (recht kleines) $C > 0$ mit $|f(x) - g(x)| \leq C|x-a|^3$ und plotten Sie in einer zweiten Grafik $|f - g|$ sowie die Funktion $x \mapsto C|x-a|^3$.

(6 Punkte)