Prof. Dr. R. Seydel Universität Frankfurt, WS 2013/14

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Numerische Methoden für Differentialgleichungen

Alle Lösungen sind (ggf. inklusive Programmcode und Programmausgabe) in Papierform abzugeben. Der Programmcode ist der Tutorin noch einmal separat per Mail zuzuschicken.

Aufgabe 2.1 (Euler-Verfahren)
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \frac{1}{1 + y(t)}, \quad y(0) = 0. \tag{$*$}$$

a) Zeigen Sie, dass das Problem ($*$) auf $[0, 1]$ eine eindeutige Lösung besitzt. Hier ist es sinnvoll, eine explizite Lösung zu suchen und im Nachhinein zu zeigen, dass sie eindeutig ist.

b) Berechnen Sie anhand des Euler-Verfahrens auf dem äquidistanten Gitter $t_0 = 0$, $t_1 = 1/4$, $t_2 = 1/2$, $t_3 = 3/4$, $t_4 = 1$ eine Näherungslösung.

(4 points)

Aufgabe 2.2 (Explizites Euler-Verfahren)

a) Schreiben Sie eine Scilab/MATLAB-Funktion `[T,Y]=Euler(f,t0,t,y0,N)`, die als Parameter die rechte Seite `f(t,y)` einer Dgl $y'(t) = f(t, y(t))$ mit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die Startzeit `t0`, die Endzeit `t`, den Anfangswert `y0` und die Anzahl `N` der Euler-Schritte verlangt und das äquidistante Zeitgitter `T` sowie die Werte `Y` der Euler-Trajektorie zurückliefert.

b) Testen Sie Ihr Verfahren an der skalaren Gleichung

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1, \quad 0 \le t \le 1.$$

Plotten Sie die Lösungen für $N = 2^i$, $i = 0, 1, \ldots, 7$ sowie die exakte Lösung in eine Grafik und legen Sie eine Legende an.

c) Fertigen Sie einen Konvergenzplot für die Euler-Lösungen aus b) an. Benutzen Sie dazu den Scilab/MATLAB-Befehl `loglog`. Schätzen Sie aus Ihrem Plot die Konvergenzrate des Euler-Verfahrens. Informationen zu Konvergenzplots bekommen Sie im Tutorium.

(6 Punkte)

Aufgabe 2.3 (Lösungskurven nichtlinearer Gleichungen)
Es kann im Allgemeinen schwierig sein, Lösungskurven nichtlinearer Gleichungen zu bestimmen. Sie können sich z.B. mit Hilfe der Webseite Wolfram Alpha davon überzeugen, dass es keine simple Lösungsformel für die Gleichung

$$0 = F(x, y) := x^2 + xy - 2y^3 \tag{1}$$

gibt. Es ist allerdings möglich, eine Lösungskurve mit Ihnen bereits bekannten numerischen Methoden anzunähern.

a) Wenden Sie den Satz über die implizite Funktion am Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ korrekt an.

b) Differenzieren Sie die Gleichung $0 = F(x, g(x))$ nach x und stellen Sie durch einfache Manipulation des Ergebnisses eine Differentialgleichung für die auflösende Funktion g auf.

c) Benutzen Sie Ihre Funktion `Euler` aus Aufgabe 2.2 mit `N=300`, um g auf dem Intervall $[1, 2]$ zu approximieren.

d) Welche Differentialgleichung löst die Funktion $h(x) := g(1 - x)$?

e) Nutzen Sie d), um mit Ihrer Funktion `Euler` mit `N=300` eine Approximation von g auf dem Intervall $[0.2, 1]$ zu generieren.

(6 Punkte)