Skript zur Vorlesung

Lineare Algebra II
Aufbaukurs

Sommersemester 2006
(dreistündig)

Prof. Dr. Annette Werner

Inhaltsverzeichnis

7 Affine Räume

Betrachten wir die Ebene $\mathbb{R}^2$ als Vektorraum, so können wir jedes $x = \binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ als Punkt eintragen. Die Addition von Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ lässt sich geometrisch darstellen, indem man die Punkte x und y mit 0 verbindet und ein Parallelogramm einzeichnet. Das kann man auch so beschreiben, dass man y mit 0 verbindet und dieses Geradenstück parallel an x verschiebt.
Wir bezeichnen jetzt mit $\mathbb{A}^2$ die Ebene, in der wir den Nullpunkt „vergessen" (eine formale Definition folgt später). Dann können wir immer noch ein $x \in \mathbb{A}^2$ und ein $y \in \mathbb{R}^2$ auf diese Weise addieren. Das wollen wir jetzt formalisieren und untersuchen. Dazu brauchen wir zunächst folgende Definition.

Definition 7.1 Es sei G eine Gruppe mit Verknüpfung $\circ$ und neutralem Element. Ferner sei M eine Menge. Eine Abbildung

$$\begin{aligned} G \times M &\to M \\ (g, m) &\mapsto g * m \end{aligned}$$

heißt **Operation von G auf M**, falls gilt

i) $(g_1 \circ g_2) * m = g_1 * (g_2 * m)$ für alle $g_1, g_2 \in G$ und $m \in M$

ii) $e * m = m$.

Beispiel 1:

i) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(K) \times K^n &\to K^n \\ (A, v) &\mapsto Av \end{aligned}$$

ist eine Operation von $\mathrm{GL}_n(K)$ auf K^n.

ii) Wir bezeichnen mit $\mathrm{GL}(V)$ die Menge der Automorphismen von V, d.h. die Menge der Isomorphismen $f : V \to V$. $\mathrm{GL}(V)$ bildet eine Gruppe bezüglich der Komposition $\circ$ mit neutralem Element id. Dann definiert

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(V) \times V &\to V \\ (f, v) &\mapsto f(v) \end{aligned}$$

eine Operation von $\mathrm{GL}(V)$ auf V.

iii) Sei $G = \mathcal{S}_n$ die Gruppe der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$. Dann wird durch

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_n \times \{1, \dots, n\} & \to & \{1, \dots, n\} \\ (\sigma, j) & \mapsto & \sigma(j) \end{array}$$

eine Operation von $\mathcal{S}_n$ auf $\{1, \dots, n\}$ definiert.

iv) Sei V ein Vektorraum. Dann operiert die Gruppe V auf der Menge V vermöge

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \to & V \\ (v, x) & \mapsto & v + x. \end{array}$$

Definition 7.2 G operiere auf der Menge M. Sei $m \in M$. Die Teilmenge

$$G * m := \{g * m : g \in G\}$$

von M heißt **Bahn** von m unter G.

Beispiel 2:

i) Im Beispiel 1, i) ist die Bahn der 0 gerade $\mathrm{GL}_n(K) * 0 = \{0\}$.
   Für jedes $v \neq 0$ in K^n ist die Bahn

$$\mathrm{GL}_n(K) * v = K^n.$$

ii) Im Beispiel 1, iii) ist für jedes $k = \{1, \dots, n\}$ die Bahn $\mathcal{S}_n * k = \{1, \dots, n\}$.

iii) Im Beispiel 1, iv) ist für jedes $v \in V$ die Bahn $v + V = V$.

Definition 7.3 Die Operation $G \times M \to M$ heißt **transitiv**, wenn es für alle $m_1, m_2 \in M$ ein $g \in G$ mit $g * m_1 = m_2$ gibt. Falls es für alle $m_1, m_2 \in M$ **genau** ein $g \in G$ mit $g * m_1 = m_2$ gibt, so heißt die Operation **einfach transitiv**.

Lemma 7.4 i) G operiert genau dann transitiv auf M, wenn für jedes $m \in M$ gilt

$$G * m = M.$$

ii) G operiert genau dann einfach transitiv auf M, wenn für alle $m \in M$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} G & \to & M \\ g & \mapsto & g * m \end{array}$$

bijektiv ist.

Beweis :

i) G operiert genau dann transitiv auf M, wenn es für alle $m \in M$ zu jedem $n \in M$ ein g mit $g * m = n$ gibt. Das ist äquivalent zu $G * m = M$ für alle m.

ii) G operiert genau dann einfach transitiv auf M, wenn es für alle $m \in M$ zu jedem $n \in N$ ein eindeutig bestimmtes $g \in G$ mit $g * m = n$ gibt. Das bedeutet gerade, dass für alle m die Abbildung $g \mapsto g * m$ eine Bijektion $G \to M$ liefert.

$\square$

Beispiel 3:

i) In Beispiel 1, i) operiert $\mathrm{GL}_n(K)$ nicht transitiv auf K^n, da $\mathrm{GL}_n(K) * 0 = \{0\}$ ist.

ii) Analog sieht man, dass in Beispiel 1, ii) die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ nicht transitiv auf V operiert.

iii) In Beispiel 1, iii) operiert $\mathcal{S}_n$ transitiv auf $\{1, \ldots, n\}$, da wir schon gesehen haben, dass alle Bahnen gleich $\{1, \ldots, n\}$ sind. Für $n \geq 3$ ist diese Operation jedoch nicht einfach transitiv, denn $|\mathcal{S}_n| = n! > n$. Daher kann

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n & \to & \{1, \ldots, n\} \\ \sigma & \mapsto & \sigma(k) \end{array}$$

für kein $k \in \{1, \ldots, n\}$ eine Bijektion sein.

iv) In Beispiel 1, iv) operiert V transitiv auf V, denn

$$\begin{array}{ccc} V & \to & V \\ v & \mapsto & v + x \end{array}$$

ist für alle $x \in V$ eine Bijektion (mit Umkehrabbildung $w \mapsto w - x$).

Definition 7.5 G operiere auf der Menge M. Für alle $m \in M$ heißt

$$G_m = \{g \in G : g * m = m\}$$

der **Stabilisator** von $m \in G$.

Offenbar ist $e \in G_m$ und mit g_1 und g_2 liegt auch g_1^{-1} und $g_1 \circ g_2$ in G_m. Also ist G_m eine Untergruppe von G.

Lemma 7.6 Eine transitive Operation der Gruppe G auf der Menge M ist genau dann einfach transitiv, wenn für alle $m \in M$ der Stabilisator $G_m = \{e\}$ ist.

Beweis : Sei $m \in M$ beliebig. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} G & \to & M \\ g & \mapsto & g * m \end{array}$$

ist surjektiv, da G transitiv auf M operiert. Es gilt $g * m = h * m$ genau dann, wenn $(g^{-1}h) * m = m$ ist, also genau dann, wenn $g^{-1}h \in G_m$ ist.
Also ist die Abbildung $g \mapsto g * m$ genau dann injektiv, wenn $G_m = \{e\}$ ist. $\square$

Wir wollen nun die Situation aus Beispiel 1, iv) näher untersuchen. Ab jetzt bezeichne V immer einen n-dimensionalen K-Vektorraum.

Definition 7.7 Eine Menge M, auf der die Gruppe V (bezüglich +) einfach transitiv operiert, heißt **affiner Raum** mit zugehörigem Vektorraum V.

In Beispiel 1, iv) haben wir gesehen, dass V zusammen mit der Operation

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & V \\ (v, x) & \mapsto & v + x \end{array}$$

ein affiner Raum mit zugehörigem Vektorraum V ist.

Lemma 7.8 Sind M_1 und M_2 affine Räume mit zugehörigem Vektorraum V, so gibt es eine Bijektion $M_1 \to M_2$.

Beweis : Nach Lemma 7.4 gibt es Bijektionen $\alpha : V \to M_1$ und $\beta : V \to M_2$. Also ist $\beta \circ \alpha^{-1} : M_1 \to M_2$ eine Bijektion. $\square$

Da wir ab jetzt nur noch die Gruppe V operieren lassen, schreiben wir $+$ für die Verknüpfung $\circ$ und 0 für das neutrale Element e. Wir bezeichnen einen affinen Raum mit zugehörigem Vektorraum V als $\mathbb{A}(V)$. Die Elemente von $\mathbb{A}(V)$ nennen wir Punkte. Die einfach transitive Operation

$$V \times \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$$

zu einem affinen Raum bezeichnen wir statt mit $*$ von jetzt an mit $+$, also als $(v, x) \mapsto v + x$.
Fixieren wir einen Punkt $x \in \mathbb{A}(V)$, so ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{A}(V) \\ v & \mapsto & v + x \end{array}$$

bijektiv. Wir bezeichnen die Umkehrabbildung mit $v_x : \mathbb{A}(V) \to V$. Anders ausgedrückt: Für alle $y \in \mathbb{A}(V)$ ist der Vektor $v_x(y) \in V$ das eindeutig bestimmte Element in V mit

$$y = v_x(y) + x.$$

Im Spezialfall $V = K^n$ schreiben wir

$$\mathbb{A}^n(K) = \mathbb{A}(K^n)$$

und nennen diesen Raum den ***n*-dimensionalen affinen Raum über *K***.

Lemma 7.9 Es sei $\mathbb{A}(V)$ ein affiner Raum mit zugehörigem Vektorraum V, und es seien $x, y, z \in \mathbb{A}(V)$.
Dann gilt

$$v_x(z) = v_x(y) + v_y(z).$$

Beweis : Definitionsgemäß gilt

$$\begin{aligned} y &= v_x(y) + x \text{ sowie} \\ z &= v_y(z) + y, \end{aligned}$$

also folgt

$$\begin{aligned} (v_x(y) + v_y(z)) + x &= v_y(z) + (v_x(y) + x) \\ &= v_y(z) + y \\ &= z, \end{aligned}$$

woraus $v_x(z) = v_x(y) + v_y(z)$ folgt. □

Definition 7.10 Wir definieren die **Dimension** eines affinen K-Vektorraums $\mathbb{A}(V)$ mit zugehörigem Vektorraum V als

$$\dim \mathbb{A}(V) := \dim V.$$

Mit dieser Definition gilt $\dim \mathbb{A}^n(K) = \dim K^n = n$, so dass die Bezeichnung „n-dimensionaler affiner Raum“ sinnvoll ist.

Ab jetzt sei immer $\mathbb{A}(V)$ ein affiner Raum mit zugehörigem Vektorraum V.

Definition 7.11 Eine nicht-leere Teilmenge $M \subset \mathbb{A}(V)$ heißt **affiner Unterraum** von $\mathbb{A}(V)$, falls ein Punkt $x \in M$ und ein Unterraum $W \subset V$ existieren mit

$$M = W + x = \{w + x : w \in W\}.$$

Lemma 7.12 Ein affiner Unterraum $M = W + x$ von $\mathbb{A}(V)$ ist ein affiner Raum mit zugehörigem Vektorraum W.

Beweis : Wir müssen zeigen, dass W einfach transitiv auf M operiert. Wir schränken dazu die einfach transitive Operation $V \times \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ auf $W \times M$ ein. Ist $w' \in W$ und $w + x \in M$, so ist

$$w' + (w + x) = (w' + w) + x \in W + x.$$

Also erhalten wir so eine Operation

$$W \times M \to M.$$

Diese ist ebenfalls einfach transitiv. Sind $m_1 = w_1 + x$ und $m_2 = w_2 + x$ Elemente in M, so ist $(w_2 - w_1) + m_1 = m_2$. Daher existiert ein $w \in W$ (nämlich $w = w_2 - w_1$) mit $w + m_1 = m_2$. Dieses Element ist eindeutig bestimmt, da V einfach transitiv auf $\mathbb{A}(V)$ operiert. □

Ist $M = W + x$ ein affiner Unterraum, so ist der lineare Unterraum $W \subset V$ als Bild von M unter der Abbildung $v_x : \mathbb{A}(V) \to V$ eindeutig bestimmt. Offenbar ist $M = W + x = W + y$ für alle $y \in M$.
Man überlegt sich leicht, dass eine Teilmenge $M \subset \mathbb{A}(V)$ genau dann ein affiner Unterraum ist, wenn für ein $x \in M$ das Bild $v_x(M) \subset V$ ein Unterraum ist. Ist M ein affiner Unterraum der Dimension 0,1 bzw. 2 von $\mathbb{A}(V)$, so nennen wir M einen **affinen Punkt**, eine **affine Gerade** bzw. eine **affine Ebene** in $\mathbb{A}(V)$.

Definition 7.13 Seien x, y zwei Punkte in $\mathbb{A}(V)$. Ist $x \neq y$, so definiert der von $v_x(y)$ erzeugte Unterraum $\langle v_x(y) \rangle \subset V$ einen affinen Unterraum

$$L(x, y) = \langle v_x(y) \rangle + x.$$

Dieser heißt **affine Gerade durch *x* und *y***. Definitionsgemäß ist $y = x + v_x(y)$. Wegen $v_x(y) = -v_y(x)$ (prüfen Sie das!) folgt also

$$\begin{aligned} \langle v_x(y) \rangle + x &= \langle v_x(y) \rangle + y \\ &= \langle v_y(x) \rangle + y. \end{aligned}$$

Diese Definition hängt also nicht von der Reihenfolge von x und y ab.

Beispiel: Im $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ ist $L(x, y) = \{\lambda x + \mu y : \lambda + \mu = 1\}$.

Im Gegensatz zu linearen Unterräumen von Vektorräumen, die alle 0 enthalten, können affine Unterräume auch disjunkt sein: Es sei W ein eindimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$. Betrachten wir zwei Punkte x, y in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ mit $x \in W$ und $y \notin W$, so ist $x + W \cap y + W = \emptyset$. Ansonsten müsste nämlich $x + w_1 = y + w_2$ mit $w_1, w_2 \in W$ gelten, woraus $y \in W_2$ folgte.
Allgemein gilt für affine Unterräume M_1, M_2 von $\mathbb{A}(V)$ zu Vektorräumen W_1, W_2:

$$M_1 \cap M_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{ für alle } x_1 \in M_1, x_2 \in M_2 \text{ ist } v_{x_1}(x_2) \in W_1 + W_2.$$

Ist nämlich $x \in M_1 \cap M_2$, so schreiben wir $x = x_i + v_{x_i}(x) \in M_i$ für $i = 1, 2$, woraus $v_{x_i}(x) \in W_i$ folgt. Mit Lemma 7.9 folgt

$$\begin{aligned} v_{x_1}(x_2) &= v_{x_1}(x) + v_x(x_2) \\ &= v_{x_1}(x) - v_{x_2}(x) \in W_1 + W_2. \end{aligned}$$

Ist umgekehrt $v_{x_1}(x_2) = w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$, so ist

$$\begin{aligned} x_2 - w_2 &= x_1 + v_{x_1}(x_2) - w_2 \\ &= x_1 + w_1 \in M_1 \cap M_2. \end{aligned}$$

Man zeigt leicht, dass für affine Unterräume $(M_i)_{i \in I}$ mit Vektorräumen $(W_i)_{i \in I}$ der Schnitt

$$\bigcap_{i \in I} M_i$$

entweder $\emptyset$ oder wieder ein affiner Unterraum von $\mathbb{A}(V)$ mit Vektorraum $\bigcap\limits_{i \in I} W_i$ ist. (Prüfen Sie das!)

Definition 7.14 Für eine Teilmenge $\emptyset \neq N \subset \mathbb{A}(V)$ definieren wir die **affine Hülle** von N als

$$\langle N \rangle_{\text{aff}} = \bigcap_{\substack{M \subset \mathbb{A}(V) \text{ aff. UR} \\ N \subset M}} M,$$

wobei der Schnitt über alle affinen Unterräume $M \subset \mathbb{A}(V)$ läuft, die N enthalten. Die affine Hülle $\langle N \rangle_{\text{aff}}$ ist $\emptyset$ oder ein affiner Unterraum von $\mathbb{A}(V)$.

Wir setzen zusätzlich $\langle \emptyset \rangle_{\text{aff}} = \emptyset$.

Sind M_1 und M_2 affine Unterräume von $\mathbb{A}(V)$ mit zugehörigen Vektorräumen W_1 und W_2, so bezeichnen wir mit $\langle M_1, M_2 \rangle_{\text{aff}} = \langle M_1 \cup M_2 \rangle_{\text{aff}}$ die affine Hülle von $M_1 \cup M_2$.

Sei $x_1 \in M_1$ und $x_2 \in M_2$. Dann ist $\langle M_1, M_2 \rangle_{\text{aff}} = (W_1 + W_2 + \langle v_{x_1}(x_2) \rangle) + x_1$. Um dies zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass der affine Unterraum auf der rechten Seite in jedem affinen Unterraum $W + x$ enthalten ist, der M_1 und M_2 enthält. In der Tat, aus $M_1 \cup M_2 \subset W + x$ folgt $W_1 \subset W$ und $W_2 \subset W$.

Satz 7.15 (affine Dimensionsformel)

i) Ist $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, so gilt

$$\dim_K \langle M_1, M_2 \rangle_{\text{aff}} = \dim_K M_1 + \dim_K M_2 - \dim_K (M_1 \cap M_2)$$

.

ii) Ist $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, so gilt

$$\dim_K \langle M_1, M_2 \rangle_{\text{aff}} = \dim_K M_1 + \dim_K M_2 + 1 - \dim_K (M_1 \cap M_2)$$

Beweis :
Sei $x_1 \in M_1$ und $x_2 \in M_2$.

i) Ist $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, so ist $\langle v_{x_1}(x_2) \rangle \subset W_1 + W_2$, also $\langle M_1, M_2 \rangle_{\text{aff}} = (W_1 + W_2) + x_1$.

   Da $M_1 \cap M_2$ ein affiner Raum mit zugehörigem Vektorraum $W_1 \cap W_2$ ist, folgt die Behauptung aus der Dimensionsformel für lineare Unterräume.

ii) Ist $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, so ist $\langle v_{x_1}(x_2) \not\subset W_1 + W_2$, d.h. $\dim(\langle v_{x_1}(x_2) \rangle + W_1 + W_2) = 1 + \dim(W_1 + W_2)$. Wieder folgt die Behauptung mit der Dimensionsformel für lineare Unterräume.

□

Definition 7.16

i) Zwei affine Unterräume M_1, M_2 von $\mathbb{A}(V)$ mit zugehörigen Vektorräumen W_1, W_2 heißen **parallel** $(M_1 || M_2)$, falls $W_1 = W_2$ gilt.

ii) M_1 und M_2 heißen **schwach parallel** $(M_1 \lhd M_2)$, falls $W_1 \subset W_2$ gilt. Man kann also die Operation von V auf $\mathbb{A}(V)$ auch als „Parallelverschiebung“ verstehen.

Proposition 7.17 Seien M_1, M_2 affine Unterräume von $\mathbb{A}(V)$ mit Vektorräumen W_1, W_2.

i) Ist $M_1 || M_2$, so ist $M_1 = M_2$ oder $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

ii) Ist $M_1 \lhd M_2$, so ist $M_1 \subset M_2$ oder $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

Beweis : Ist $M_1 \lhd M_2$ und $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$, so sei $x \in M_1 \cap M_2$. Dann ist $M_1 = W_1 + x$ und $M_2 = W_2 + x$. Aus $W_1 \subset W_2$ folgt also $M_1 \subset M_2$, aus $W_1 = W_2$ folgt $M_1 = M_2$. $\square$

Definition 7.18

i) $(n+1)$ Punkte $(x_0, \ldots, x_n)$ im affinen Raum $\mathbb{A}(V)$ heißen **affin unabhängig**, falls die n Verbindungsvektoren

$$v_{x_0}(x_1), \ldots, v_{x_0}(x_n)$$

in V linear unabhängig sind.

ii) $(x_0, \ldots, x_n)$ heißt **Basis von** $\mathbb{A}(V)$, falls $v_{x_0}(x_1), \ldots, v_{x_0}(x_n)$ eine Basis von V bilden.

Offenbar ist mit $(x_0, \ldots, x_n)$ auch jede Umordnung dieses Systems linear unabhängig bzw. eine Basis.
Beispiel: Im $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ bilden die Punkte

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis, da $v_{x_0}(x_1) = \binom{-1}{1}$ und $v_{x_0}(x_2) = \binom{-2}{0}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

Nun wollen wir den richtigen Abbildungsbegriff für affine Räume einführen.

Definition 7.19 Es seien $\mathbb{A}(V)$ bzw. $\mathbb{A}(W)$ affine Räume mit zugehörigen Vektorräumen V bzw. W. Eine Abbildung $f : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(W)$ heißt **affine Abbildung** oder **affin linear**, falls für ein $x \in A(V)$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi_x : V & \to & W \\ v & \mapsto & v_{f(x)}(f(v+x)) \end{array}$$

linear ist. Definitionsgemäß ist $f(v+x) = \varphi_x(v) + f(x)$.

Lemma 7.20 Ist für ein $x \in \mathbb{A}(V)$ die Abbildung $\varphi_x : V \to W$ linear, so ist für alle $y \in \mathbb{A}(V)$ $\varphi_y = \varphi_x$. Die Definition 7.19 hängt also nicht vom gewählten $x \in \mathbb{A}(V)$ ab.

Beweis : Es ist $f(v+y) = \varphi_y(v) + f(y)$. Ferner gilt $y = v_x(y) + x$, also

$$f(v+y) = f(v + v_x(y) + x) = \varphi_x(v + v_x(y)) + f(x) = \varphi_x(v) + \varphi_x(v_x(y)) + f(x),$$

da φ_x linear ist. Ferner ist

$$\begin{aligned} f(y) &= f(v_x(y) + x) \\ &= \varphi_x(v_x(y)) + f(x). \end{aligned}$$

Also folgt

$$f(v+y) = \varphi_x(v) + f(y),$$

woraus $\varphi_y(v) = \varphi_x(v)$ folgt. □

Wir bezeichnen die lineare Abbildung φ_x zu einer affinen Abbildung $f : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(W)$ in Zukunft mit φ_f. Nach Lemma 7.20 ist das gerechtfertigt, da φ_x unabhängig von der Wahl von x ist.

Satz 7.21 Es sei $f : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(W)$ eine affine Abbildung. Es seien M_1, M_2 affine Unterräume von $\mathbb{A}(V)$ mit zugehörigen Vektorräumen W_1, W_2. Dann gilt:

i) $f(M_1)$ ist ein affiner Unterraum von $\mathbb{A}(W)$ mit Vektorraum $\varphi_f(W_1)$.

ii) f bildet die affine Gerade durch zwei verschiedene Punkte x und y in $\mathbb{A}(V)$ auf die affine Gerade durch $f(x)$ und $f(y)$ in $\mathbb{A}(W)$ ab, falls $f(x) \neq f(y)$ gilt, und auf $f(x)$, falls $f(x) = f(y)$ gilt.

iii) Ist $M_1 || M_2$ bzw. $M_1 \lhd M_2$, so ist auch $f(M_1) || f(M_2)$ bzw. $f(M_1) \lhd f(M_2)$.

Beweis :

i) Ist $M_1 = W_1 + x_1$, so gilt für alle $w \in W_1$ die Gleichung: $f(w + x_1) = \varphi_f(w) + f(x_1)$. Daher ist $f(M_1) = \varphi_f(W_1) + f(x_1)$ ein affiner Unterraum mit zugehörigem Vektorraum $\varphi_f(W_1)$.

ii) Es ist $L(x,y) = \langle v_x(y) \rangle + x$, nach i) gilt also

$$\begin{aligned} f(L(x,y)) &= \varphi_f \langle v_x(y) \rangle + f(x) \\ &= \langle \varphi_f(v_x(y)) \rangle + f(x) \end{aligned}$$

Nun ist definitionsgemäß $\varphi_f(v_x(y)) = v_{f(x)} f(x + v_x(y)) = v_{f(x)}(f(y))$, also folgt $f(L(x,y)) = \langle v_{f(x)}(f(y)) \rangle + f(x)$. Falls $f(x) \neq f(y)$, so ist dies $L(f(x), f(y))$. Falls $f(x) = f(y)$, so folgt $f(L(x,y)) = \{f(x)\}$.

iii) Übungsaufgabe

□

Wir betrachten jetzt noch die Menge

$$\mathrm{GA}(\mathbb{A}(V) = \{f : \mathbb{A}(V \to \mathbb{A}(V) \quad \text{bijektive affine Abbildung}\}$$

der bijektiven affinen Selbstabbildungen von $\mathbb{A}(V)$.

Lemma 7.22 $\mathrm{GA}(\mathbb{A}(V))$ ist eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen.

Beweis : Offenbar ist $\mathrm{id} : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ ein neutrales Element in GA $\mathbb{A}(V)$. Es sei $f : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ eine bijektive affine Abbildung. Dann gilt für $\varphi_f : V \to V$, dass $\mathrm{Kern}\varphi_f = 0$ ist. Ist nämlich $\varphi_f(v) = 0$, so folgt für beliebiges $x \in \mathbb{A}(V)$:

$$f(v + x) = \varphi_f(v) + f(x) = f(x).$$

Da f bijektiv ist, folgt $v + x = x$. Nun operiert V einfach transitiv auf $\mathbb{A}(V)$, woraus $v = 0$ folgt. Somit ist φ_f invertierbar. Die affine Abbildung $f^{-1} : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$, definiert durch $f^{-1}(v + f(x)) = \varphi_f^{-1}(v) + x$ ist eine Umkehrabbildung von f. Wir rechnen nämlich leicht nach:

$$f(f^{-1}(v + f(x)) = f(\varphi_f^{-1}(v) + x) = \varphi_f(\varphi_f^{-1}(v)) + f(x) = v + f(x)$$

und

$$f^{-1}(f(v + x)) = f^{-1}(\varphi_f(v) + f(x)) = \varphi_f^{-1}(\varphi_f(v)) + x = v + x.$$

□

Aus dem Beweis von Lemma 7.22 folgt, dass die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{GA}(\mathbb{A}(V)) \to \mathrm{GL}(V) := \{f : V \to V \text{ linear invertierbar}\}$$
$$f \mapsto \varphi_f$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir wollen jetzt noch seinen Kern bestimmen.

Satz 7.23 Für jedes $w \in V$ ist die Translations-Abbildung

$$\begin{aligned} t_w : \mathbb{A}(V) &\to \mathbb{A}(V) \\ x &\mapsto w + x \end{aligned}$$

affin-linear. Die Menge aller Translationen t_w bildet eine Untergruppe $T \subset \mathrm{GA}(\mathbb{A}(V))$. Die Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$1 \to T \to \mathrm{GA}(\mathbb{A}(V)) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{GL}(V) \to 1$$

ist exakt, d.h. T ist eine Untergruppe von $\mathrm{GA}(\mathbb{A}(V))$, Kern $\Phi = T$ und Φ ist surjektiv.

Beweis : Es ist $t_0 = \mathrm{id}$ und $t_{-w} \circ t_w = t_w \circ t_{-w} = t_0 = \mathrm{id}$, also ist T wirklich eine Untergruppe von $\mathrm{GA}(\mathbb{A}(V))$. Ferner gilt

$$t_w(v + x) = w + v + x = v + t_w(x),$$

also ist $\varphi_{t_w} = \mathrm{id} \in \mathrm{GL}(V)$. T liegt also im Kern der Abbildung Φ. Ist umgekehrt $f : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ eine bijektive affine Abbildung mit $\Phi(f) = \mathrm{id}$, so gilt für beliebiges $x \in \mathbb{A}(V)$:

$$\begin{aligned} f(v + x) &= \varphi_f(v) + f(x) = v + f(x) \\ &= (v + x) + v_x(f(x)) \end{aligned}$$

für alle $v \in V$, woraus für $y = v + x$ folgt

$$v_y(f(y)) = v_x(f(x)) := w \in V.$$

Also ist $f = t_w$. Es gilt also $T = \mathrm{Kern}\Phi$. Ist $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ beliebig, so wählen wir ein $x \in \mathbb{A}(V)$ und setzen $f(v+x) = \varphi(v)+x$. Das ist eine affine Abbildung mit $\Phi(f) = \varphi$. Somit ist Φ auch surjektiv. □

8 Projektive Räume

Wir betrachten zunächst zwei affine Geraden $L_1 = x_1 + W_1$ und $L_2 = x_2 + W_2$ in einem zweidimensionalen affinen Raum $\mathbb{A}(V)$, d.h. es ist $\dim V = 2$ und $\dim W_1 = \dim W_2 = 1$. Gilt $W_1 = W_2$, so sind L_1 und L_2 parallel, also nach Proposition 7.17 entweder $L_1 = L_2$ oder $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.
Gilt $W_1 \neq W_2$, so ist $W_1 \cap W_2 = 0$ und $\langle W_1, W_2\rangle = V$. Also ist $v_{x_1}(x_2) \in \langle W_1, W_2\rangle$, also $v_{x_1}(x_2) = w_1 + w_2$ für $w_i \in W_i$, woraus $x = x_1 + w_1 = x_2 - w_2 \in L_1 \cap L_2$ folgt. Nach der Dimensionsformel Satz 7.15 i) gilt

$$\dim(M_1 \cap M_2) = \underbrace{\dim\langle M_1, M_2\rangle_{\mathsf{aff}}}_{\leq \dim \mathbb{A}(V)=2} - \dim M_1 - \dim M_2 \leq 0,$$

also $\dim M_1 \cap M_2 = 0$, woraus $L_1 \cap L_2 = \{x\}$ folgt.
Insgesamt folgt die intuitiv einleuchtende Tatsache, dass in einer affinen Ebene zwei verschiedene Geraden entweder parallel sind oder genau einen Schnittpunkt haben.
Wir werden nun die sogenannten projektiven Räume einführen. In zweidimensionalen projektiven Räumen haben zwei verschiedene Geraden immer genau einen Schnittpunkt.

Definition 8.1 Sei V ein K-Vektorraum. Der **projektive Raum** $\mathbb{P}(V)$ ist definiert als die Menge aller Geraden (also eindimensionaler Untervektorräume) von V.
Wir definieren $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$ und nennen einen ein- bzw. zweidimensionalen projektiven Raum eine **projektive Gerade** bzw. eine **projektive Ebene**.

Lemma 8.2 Die Abbildung

$$\begin{aligned} p : V \setminus \{0\} &\to \mathbb{P}(V), \\ v &\mapsto \langle v \rangle, \end{aligned}$$

die einen Vektor $v \neq 0$ auf die von v aufgespannte Gerade in V abbildet, ist surjektiv. Es gilt $p(v) = p(w)$ genau dann, wenn $v = aw$ für ein $a \in K^\times$ ist.

Beweis : Jede Gerade in V wird von einem $v \neq 0$ aufgespannt, also ist p surjektiv. Offenbar ist $p(v) = p(w) \Leftrightarrow \langle v \rangle = \langle w \rangle \overset{v,w \neq 0}{\Leftrightarrow} v \in \langle w \rangle \overset{v \neq 0}{\Leftrightarrow} v = aw$ für ein $a \in K^\times$. $\square$

Im Fall $V = 0$ gilt $\mathbb{P}(V) = \emptyset$, und wir haben $\dim \mathbb{P}(V) = -1$ gesetzt. Ist $\dim V = 1$, so besteht $\mathbb{P}(V)$ aus einem Punkt, und es gilt $\dim \mathbb{P}(V) = 0$.
Ist $V = K^{n+1}$, so schreiben wir auch

$$\mathbb{P}^n(K) = \mathbb{P}(K^{n+1})$$

(Vorsicht: Da $\dim \mathbb{P}^n(K) = n$ ist, ist es sinnvoll, hier in der Notation von $(n+1)$ zu n überzugehen).

Definition 8.3 Ein projektiver Unterraum (oder einfach Unterraum) von $\mathbb{P}(V)$ ist das Bild $p(W \setminus \{0\}) \subset \mathbb{P}(V)$ für einen Unterraum W von V.
Also ist $P \subset \mathbb{P}(V)$ genau dann ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$, wenn es einen Unterraum W von V gibt, so dass P aus der Menge aller Geraden in W besteht. Wir schreiben auch $P = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$.

Lemma 8.4

i) Sind $P_1 = \mathbb{P}(W_1)$ und $P_2 = \mathbb{P}(W_2)$ die projektiven Unterräume von $\mathbb{P}(V)$ zu den Untervektorräumen W_1 und W_2 von V. Dann ist $P_1 \cap P_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2)$ der projektive Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ zum Unterraum $W_1 \cap W_2 \subset V$.

ii) Für eine beliebige Teilmenge $M \subset \mathbb{P}(V)$ sei

$$\langle M \rangle_{\text{proj}} = \bigcap_{\substack{W \subset V \text{ Unterraum} \\ M \subset \mathbb{P}(W)}} \mathbb{P}(W)$$

der Schnitt aller projektiven Unterräume von $\mathbb{P}(V)$, die M enthalten.

$\langle M\rangle_{\text{proj}}$ heißt **projektive Hülle** von M. Die projektive Hülle $\langle M\rangle_{\text{proj}}$ ist der projektive Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ zum Untervektorraum $\langle p^{-1}(M)\rangle \subset V$.

Beweis :

i) Es ist $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)$ die Menge aller Geraden in V, die in W_1 und in W_2 enthalten sind. Also ist

$$\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2).$$

ii) Ist $\mathbb{P}(W)$ ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ mit $M \subset \mathbb{P}(W)$, so folgt $p^{-1}(M) \subset p^{-1}(W) = W \setminus \{0\}$. Also ist $\langle p^{-1}(M)\rangle \subset W$. Daraus folgt

$$\langle M\rangle_{\text{proj}} = \bigcap_{\substack{W \subset V \text{ Unterraum} \\ M \subset \mathbb{P}(W)}} \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(\langle p^{-1}(M)\rangle).$$

□

Satz 8.5 (Dimensionsformel für projektive Unterräume) Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es seien $\mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2)$ projektive Unterräume von $\mathbb{P}(V)$ und $\langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2)\rangle_{\text{proj}} := \langle \mathbb{P}(W_1 \cup \mathbb{P}(W_2)\rangle_{\text{proj}}$ der kleinste projektive Unterraum von $\mathbb{P}(V)$, der $\mathbb{P}(W_1)$ und $\mathbb{P}(W_2)$ enthält. Dann gilt

$$\dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) = \dim \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) + \dim \langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2)\rangle_{\text{proj}}.$$

Beweis : Nach Lemma 8.4 ii) ist $\langle \mathbb{P}(W_1), \mathbb{P}(W_2)\rangle_{\text{proj}}$ der projektive Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ zum Unterraum $\langle p^{-1}(\mathbb{P}(W_1) \cup \mathbb{P}(W_2))\rangle$ von V.
Nun ist $\langle p^{-1}(\mathbb{P}(W_1) \cup \mathbb{P}(W_2))\rangle = \langle p^{-1}\mathbb{P}(W_1) \cup p^{-1}\mathbb{P}(W_2)\rangle = \langle W_1 \setminus \{0\} \cup W_2 \setminus \{0\}\rangle = W_1 + W_2$. Nach der Dimensionsformel für Untervektorräume gilt also

$$\begin{aligned}
\dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) &= \dim W_1 + \dim W_2 - 2 \\
&= \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) - 2 \\
&= \dim \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) + \dim \langle P(W_1), P(W_2)\rangle_{\text{proj}}.
\end{aligned}$$

□

Korollar 8.6 Sind $\mathbb{P}(W_1)$ und $\mathbb{P}(W_2)$ projektive Unterräume von $\mathbb{P}(V)$ mit $\dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) \geq \dim \mathbb{P}(V)$, so ist $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset$.

Beweis : Nach Satz 8.5 ist

$$\begin{aligned}\dim(\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)) &= \dim \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) \\ &\geq \dim \mathbb{P}(W_1) + \dim \mathbb{P}(W_2) - \dim \mathbb{P}(V) \geq 0.\end{aligned}$$

Als projektiver Raum der Dimension ≥ 0 ist $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset$. □

Ist also $\mathbb{P}(V)$ ein zweidimensionaler projektiver Raum, etwa $\mathbb{P}^1(K)$, so besitzen je zwei projektive Geraden in $\mathbb{P}(V)$ einen Schnittpunkt!
Nun wollen wir projektive Koordinaten einführen.
Ist $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, so schreiben wir $[x_0 : \cdots : x_n]$ für die Gerade $p(x) = \left\langle \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle$.
Es ist $[x_0 : \cdots : x_n] = [y_0 : \cdots : y_n]$ genau dann, wenn es ein $a \in K^\times$ gibt mit

$$x_0 = ay_0, \ldots, x_n = ay_n.$$

Jeder Punkt $x \in P^n(K)$ lässt sich also schreiben als $x = [x_0 : \cdots : x_n]$ für $x_0, \ldots, x_n \in K$, nicht alle $x_i = 0$. Es gilt $[x_0 : \cdots : x_n] = [ax_0 : \cdots : ax_n]$ für alle $a \in K^\times$.
Das Typel $(x_0, \ldots, x_n)$ ist also nur bis auf einen Faktor aus $K^\times$ bestimmt. Man nennt $(x_0, \ldots, x_n)$ projektive Koordinaten von x.

Definition 8.7 $x, y \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ heißen äquivalent $(x \sim y)$, falls $x = ay$ für ein $a \in K^\times$ gilt. Also ist $x \sim y$ genau dann, wenn $p(x) = p(y)$ gilt.

Lemma 8.8 $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n+1} \setminus \{0\}$, d.h.

i) $x \sim x$ für alle $x \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ (Reflexivität)

ii) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ für alle $x, y \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ (Symmetrie)

iii) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (für alle $x, y, z \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ (Transivität)

Beweis : leichte Übungsaufgabe. □

Für jedes $x \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ heißt

$$C(x) = \{y \in K^{n+1} \setminus \{0\} : x \sim y)\}$$

die **Äquivalenzklasse** von x.

Lemma 8.9 Zwei Äquivalenzklassen $C(x)$ und $C(y)$ sind entweder gleich oder disjunkt (d.h. $C(x) \cap C(y) = \emptyset$). (Das gilt für jede Äquivalenzrelation).

Beweis : Ist $z \in C(x) \cap C(y)$, so ist $x \sim z$ und $y \sim z$, also $x \sim y$, d.h. $C(x) = C(y)$. $\square$

Da für alle $y \in C(x)$ die Gleichung $p(x) = p(y)$ gilt, ist p auf der Äquivalenzklasse $C(x)$ konstant. p induziert also eine Abbildung $C(x) \mapsto p(x)$ von der Menge der Äquivalenzklassen nach $\mathbb{P}^n(K)$. Diese ist surjektiv, da p nach Lemma 8.2 surjektiv ist, und injektiv, da aus $p(x) = p(y)$ schon $x \sim y$, d.h. $C(x) = C(y)$ folgt.
Somit kann man $\mathbb{P}^n(K)$ mit der Menge der Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ identifizieren. Man sagt auch, $\mathbb{P}^n(K)$ ist der Quotient von $K^{n+1} \setminus \{0\}$ nach der Äquivalenzrelation $\sim$.
Ist V ein beliebiger $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum und $B = (b_0, \ldots, b_n)$ eine Basis von V, so definieren wir für jede Gerade $\langle v \rangle \subset V$ mit $v = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i b_i$ einen Punkt $\lambda_B(\langle v \rangle) \in \mathbb{P}^n(K)$ durch $\lambda_B(\langle v \rangle) = [x_0 : \cdots : x_n]$.

Lemma 8.10 Das liefert eine wohldefinierte bijektive Abbildung $\lambda_B : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(K)$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \setminus \{0\} \arrow[r, "\kappa_B"] \arrow[d, "p"] & K^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{P}(V) \arrow[r, "\lambda_B"] & \mathbb{P}^n(K) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis : Ist $\langle v \rangle = \langle w \rangle$, so ist $w = av$ für ein $a \in K^n$. Gilt also $v = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i b_i$, so ist $w = \sum\limits_{i=0}^{n} a x_i b_i$, woraus wegen $[x_0 : \cdots : x_n] = [ax_0 : \cdots : ax_n]$ die Wohldefiniertheit von λ_B folgt. Gilt $\lambda_B(\langle v \rangle) = \lambda_B(\langle w \rangle)$ mit $v = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i b_i$ und $w = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i b_i$, so gilt $[x_0 : \cdots : x_n]$ = $[y_0 : \cdots : y_n]$. Es existiert also ein $a \in K^\times$ mit $x_0 = ay_0, \ldots, x_n = ay_n$. Daher gilt $v = aw$, also $\langle v \rangle = \langle w \rangle$. Also ist λ_B injektiv. Die Surjektivität ist offensichtlich.
Für $v = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i b_i \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ ist $p \circ \kappa_B(v) = p\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = [x_0 : \cdots : x_n]$ und $\lambda_B \circ p(v) = \lambda_B(\langle v \rangle) = [x_0 : \cdots : x_n]$, also folgt $p \circ \kappa_B = \lambda_B \circ p$, d.h. das Diagramm mutiert $\square$

Was sind die richtigen Abbildungen zwischen projektiven Räumen? Ist $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlich-dimensionalen K-Vektorräumen mit

$\mathrm{Kern}\varphi = 0$, so bildet φ Geraden in V auf Geraden in W ab. Also induziert φ eine **projektive Abbildung**

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\varphi) : \mathbb{P}(V) & \to & \mathbb{P}(W). \\ \langle v \rangle & \mapsto & \langle \varphi(v) \rangle. \end{array}$$

Satz 8.11 Für lineare Abbildungen $\varphi, \psi : V \to W$ mit $\mathrm{Kern}\varphi = \ \mathrm{Kern}\psi = 0$ ist $\mathbb{P}(\varphi) = \mathbb{P}(\psi)$ genau dann, wenn $\varphi = \lambda\psi$ für ein $\lambda \in K$ gilt.

Beweis : Ist $\varphi = \lambda\varphi$ für ein $\lambda \in K$, so gilt offenbar $\mathbb{P}(\varphi) = \mathbb{P}(\psi)$. Wir nehmen umgekehrt $\mathbb{P}(\varphi) = \mathbb{P}(\psi)$ an. Definitionsgemäß gilt für jedes $v \neq 0$ in V, dass $\langle\varphi(v)\rangle = \langle\psi(v)\rangle$ ist. Also ist $\varphi(v) = \lambda(v)\psi(v)$ für ein $\lambda(v) \in K$. Wir müssen zeigen, dass $v \mapsto \lambda(v)$ konstant ist. Sind $v, w \in V \setminus \{0\}$ linear abhängig, also $v = aw$ für ein $a \in K^\times$, so folgt $\varphi(v) = \varphi(aw) = a\varphi(w) = a\lambda(w)\psi(w) = \lambda(w)\psi(v)$, also $\lambda(v) = \lambda(w)$. Sind $v, w \in V$ linear unabhängig, so sind auch $\psi(v), \psi(w)$ linear unabhängig, da ψ injektiv ist.
Nun ist

$$\begin{array}{rl} & \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) \\ = & \lambda(v)\psi(v) + \lambda(w)\psi(w) \end{array}$$

und

$$\varphi(v+w) = \lambda(v+w)\psi(v+w) = \lambda(v+w)\psi(v) + \lambda(v+w)\psi(w).$$

Da $\psi(v), \psi(w)$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda(v) = \lambda(v+w) = \lambda(w)$ und damit unsere Behauptung. □

Ist $V = W$, so liefert jeder Isomorphismus $\varphi : V \to V$ eine projektive Abbildung $\mathbb{P}(\varphi) : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$. Man rechnet leicht nach, dass $\mathbb{P}(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ und $\mathbb{P}(\varphi \circ \psi) = \mathbb{P}(\varphi) \circ \mathbb{P}(\psi)$ gilt. Die Menge aller projektiven Abbildungen der Form $\mathbb{P}(\varphi) : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ für $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ bildet also eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung. Wir bezeichnen diese Gruppe als $\mathrm{PGL}(V) = \{\mathbb{P}(\varphi) : \varphi \in \mathrm{GL}(V)\}$.
Nach Konstruktion haben wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}(V) & \to & \mathrm{PGL}(V) \\ \varphi & \mapsto & P(\varphi). \end{array}$$

Der Kern dieses Gruppenhomomorophismus, also diejenigen Elemente $\varphi \in \ \mathrm{GL}(V)$ mit $\mathbb{P}(\varphi) = \mathrm{id}$, ist nach Satz 8.11 die Menge $Z = \{\varphi = \lambda \mathrm{id}_V : \lambda \in K^\times\}$. Z ist offenbar eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$, man nennt die Abbildungen $\lambda\ \mathrm{id}_V$ auch **Homothetien**.

Lemma 8.12 $Z = \{\varphi \in \mathrm{GL}(V)$: für alle $\psi \in \mathrm{GL}(V)$ gilt $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi\}$.
Also ist Z gerade die Menge derjenigen Automorphismen von V, die mit allen Automorphismen von V vertauschen. Man nennt Z das **Zentrum** von $\mathrm{GL}(V)$.

Beweis : Offenbar gilt für jede Abbildung $\varphi = \lambda\mathrm{id}$ in Z und für beliebiges $\psi \in \mathrm{GL}(V)$:

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi &= \psi \circ (\lambda\, \mathrm{id}) = \lambda(\psi \circ \mathrm{id}) = \lambda\psi \\ &= (\lambda \mathrm{id}) \circ \psi = \varphi \circ \psi. \end{aligned}$$

Also vertauscht φ mit allen Elementen in $\mathrm{GL}(V)$. Sei umgekehrt ein $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ gegeben, das mit allen $\psi \in \mathrm{GL}(V)$ vertauscht. Wir wählen eine Basis $B = (b_0, \ldots, b_n)$ von V und betrachten $A = A_{\varphi,B,B} \in \mathrm{GL}(n+1, K)$. Dann gilt für alle $B \in \mathrm{GL}(n+1, K)$, dass $AB = BA$ ist. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $c \in K^\times$. Wir betrachten die Elementarmatrix $B = E_{n+1} + (c-1)e_{ii}$. Dann entsteht BA aus A durch Multiplikation der i-ten Zeile von A mit c, und AB entsteht aus A durch Multiplikation der i-ten Spalte von A mit c. Aus $AB = BA$ folgt also $a_{ij} = 0$ für alle $j \neq i$ und $a_{ji} = 0$ für alle $j \neq i$. Daher ist

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix.

Wir betrachten für $i \neq j$ die Elementarmarix $B = E_{n+1} - e_{ij}$. Dann entsteht BA aus A, indem man die i-te Zeile von A von der j-ten Zeile abzieht, und AB entsteht aus A, indem man die i-te Spalte von A von der j-ten Spalte abzieht. Daraus folgt $a_i - a_j = 0$, also ist $a_1 = \cdots = a_n = \lambda \in K^\times$. Somit ist $A = \lambda E_{n+1}$, also $\varphi = \lambda\mathrm{id}$. □

Wir wollen nun noch untersuchen, wann es projektive Abbildungen gibt, die auf ausgewählten Punkten vorgeschriebene Bilder annehmen. Dabei brauchen wir folgende Vorbereitungen.

Definition 8.13 Die Punkte $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{P}(V)$ heißen **projektiv unabhängig**, falls $P_1 = p(v_1), \ldots, P_r = p(v_r)$ für linear unabhängige $v_1, \ldots, v_r$ gilt. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der v_i mit $p(v_1) = P_1$.

Lemma 8.14 Sei $\mathbb{P}(V)$ ein n-dimensionaler projektiver Raum. Sind $P_0, \ldots, P_{n+1}$ $n+2$ Punkte in $\mathbb{P}(V)$, so dass jedes $(n+1)$-elementige Teilsystem von $(P_0, \ldots, P_{n+1})$ projektiv unabhängig ist, so gibt es eine Basis $B = (b_0, \ldots, b_n)$ von V mit $\lambda_B(P_i)$ = $[0 : \cdots : 1 : \cdots : 0]$ mit 1 an der i-ten Stelle für alle $0 \leq i \leq n$, sowie

$$\lambda_B(P_{n+1}) = [1 : 1 : \cdots : 1].$$

Beweis : Da $(P_0, \dots, P_n)$ projektiv unabhängig sind, gilt $P_0 = p(v_0), \dots, P_n = p(v_n)$ für linear unabhängige Vektoren $(v_0, \dots, v_n)$ aus V. Es sei $P_{n+1} = p(v_{n+1})$. Dann ist $v_{n+1} = a_0 v_0 + \cdots + a_n v_n$ mit $a_i \in K$. Wäre $a_i = 0$, so wäre $(v_{n+1}, v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ linear abhängig, was der linearen Unabhängigkeit von $(P_0, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_n)$ widerspricht. Also sind alle $a_i \neq 0$. Somit ist $B = (a_0 v_0, \dots, a_n v_n)$ eine Basis von V mit der gewünschten Eigenschaft. □

Satz 8.15 Es seien $\mathbb{P}(V)$ und $\mathbb{P}(W)$ zwei n-dimensionale projektive Räume. Für jede Wahl von $(n+2)$ Punkten $(P_0, \dots, P_{n+1})$ in $\mathbb{P}(V)$, für die jedes $(n+1)$-elementige Teilsystem projektiv unabhängig ist, und jede Wahl von $(n+2)$ Punkten $(P'_0, \dots, P'_{n+1})$ in $\mathbb{P}(W)$, für die jedes $(n+1)$-elementige Teilsystem projektiv unabhängig ist, gibt es genau eine projektive Abbildung $\mathbb{P}(\varphi) : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ mit $\mathbb{P}(\varphi)(P_i) = P'_i$ für alle $i = 0, 1, \dots, n+1$.

Beweis : Nach Lemma 8.14 existiert eine Basis $B = (b_0, \dots, b_n)$ von V mit $\lambda_B(P_i) = [0 : \cdots : 1 : \dots 0]$ mit 1 an der i-ten Stelle für $0 \leq i \leq n$ und$\lambda_B(P_{n+1}) = [1 : \cdots : 1]$ sowie eine Basis $B' = (b'_0, \dots, b'_n)$ von W mit $\lambda_{B'}(P'_1) = [0 : \cdots : 1 : \dots 0]$ mit 1 an der n-ten Stelle für $0 \leq i \leq n$ sowie $\lambda_{B'}(P_{n+1}) = [1 : \cdots : 1]$.
Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $\varphi(b_i) = b_{i'}$. Dann gilt für $0 \leq i \leq n$:

$$\lambda_{B'}(\mathbb{P}(\varphi)(P_i)) = \lambda_{B'}(\langle \varphi(b_i) \rangle) = \lambda_{B'}(\langle b_{i'} \rangle) = [0 : \cdots : 1 : \dots 0] = \lambda_{B'}(P'_i),$$

mit 1 an i-ter Stelle, also $\mathbb{P}(\varphi)(P_i) = P'_i$. Ferner ist $\lambda_{B'}(\mathbb{P}(\varphi)(P_{n+1})) = \lambda_{B'}(\varphi(b_0 + \cdots + b_n)) = \lambda_{B'}(b'_0 + \cdots + b'_n)$ = $[1 : \cdots : 1] = \lambda_{B'}(P'_{n+1})$, also $\mathbb{P}(\varphi)(P_{n+1}) = P'_{n+1}$. Ist $\mathbb{P}(\varphi)$ eine weitere Abbildung mit $\mathbb{P}(\psi)(P_i) = P'_i$ für $i = 0, \dots, n+1$, so ist $\langle \varphi(v_i) \rangle = \psi(\langle v_i \rangle)$ für alle $i = 0, \dots, n+1$. Also gilt $\varphi(v_i) = \alpha\psi(v_i)$ für $0 \leq i \leq n+1$. Daher ist $\varphi(v_i) = \alpha_i \psi(v_i)$ für $0 \leq i \leq n+1$. Aus $\langle v_{n+1} \rangle = \langle v_1 + \cdots + v_n \rangle$ folgt $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha_{n+1}$. Also ist $\mathbb{P}(\varphi) = \mathbb{P}(\psi)$. □

Korollar 8.16 Ist $\dim \mathbb{P}(V) = 1$, so operiert $P\mathrm{GL}(V)$ dreifach transitiv auf $\mathbb{P}(V)$, d.h. für beliebige Tripel (P_0, P_1, P_2) und (P'_0, P'_1, P'_2) von Punkten in $\mathbb{P}(V)$ gibt es genau ein $\mathbb{P}(\varphi) \in P\mathrm{GL}(V)$ mit $\mathbb{P}(\varphi)(P_i) = P'_i$ für $i = 0, 1, 2$.

Beweis : Das folgt sofort aus Satz 8.15. □

Insbesondere operiert $\mathrm{PGL}(n, K)$ dreifach transitiv auf $\mathbb{P}^1(K)$.

Ein projektiver Unterraum $\mathbb{P}(W)$ heißt **projektive Hyperebene** von $\mathbb{P}(V)$, falls dim$\mathbb{P}(W) = \dim \mathbb{P}(V) - 1$ gilt. Wir werden jetzt sehen, dass das Komplement einer projektiven Hyperebene in $\mathbb{P}(V)$ immer ein affiner Raum ist.

Satz 8.17 Sei $n \geq 2$ und $\mathbb{P}(V)$ ein n-dimensionaler projektiver Raum. Ferner sei $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ eine projektive Hyperebene. Wir bezeichnen mit T folgende Teilmenge der Gruppe $\mathrm{PGL}(V)$

$$T = \{\mathrm{id}\} \cup \{\mathbb{P}(\varphi) \in \mathrm{PGL}(V) : \mathbb{P}(\varphi)(P) = P \text{ genau für die Punkte } P \in \mathbb{P}(W)\}.$$

Dann gibt es eine bijektive Abbildung $\Phi : T \to (W, +)$ auf die additive Gruppe von W, und T operiert einfach transitiv auf $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$.

Beweis : Wir definieren

$$\Phi : T \to W$$

durch

$$\Phi(\mathrm{id}) = 0 \text{ und } \Phi(\mathbb{P}(\varphi)) = \varphi(v) - v,$$

falls $\mathbb{P}(\varphi) \neq \mathrm{id}$, wobei φ so gewählt ist, dass $\varphi_{|W} = \mathrm{id}_W$ gilt.
Φ ist offenbar injektiv. Ist $0 \neq w_1 \in W$ beliebig, so definieren wir eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ durch $\varphi_{|W} = \mathrm{id}_W$ und $\varphi(v) = w_1 + v$. Dann lässt $\mathbb{P}(\varphi)$ die Hyperebene $\mathbb{P}(W)$ invariant. Angenommen, $\mathbb{P}(\varphi)$ lässt den Punkt $P = p(z) \notin \mathbb{P}(W))$ invariant. Dann gilt $z = w + \alpha v$ für ein $w \in W$ und $\alpha \neq 0$ sowie $\varphi(z) = w + \alpha\varphi(v) = w + \alpha w_1 + \alpha v = \gamma z = \gamma w + \gamma\alpha v$ für ein $\gamma \in K^\times$. Daraus folgt $\gamma = 1$ und $w = w + \alpha w_1$, d.h. $\alpha w_1 = 0$, was nicht sein kann. Somit ist $\mathbb{P}(\varphi) \in T$, d.h. Φ ist auch surjektiv.

Es gilt $V = W \oplus \langle v\rangle$ für ein $v \in V$. Es sei $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ mit $\mathbb{P}(\varphi) \in T$, $\mathbb{P}(\varphi) \neq \mathrm{id}$. Dann lässt $\mathbb{P}(\varphi)$ alle $P \in \mathbb{P}(W)$ invariant, also gibt es ein $\lambda \in K^\times$ mit $\varphi_{|W} = \lambda\mathrm{id}_W$ (siehe Satz 8.11). Indem wir φ durch $\frac{1}{\lambda}\varphi$ ersetzen, können wir $\varphi_{|W} = \mathrm{id}_W$ annehmen.
Es ist $\varphi(v) = w_1 + \alpha_1 v$ mit einem $w_1 \in W$ und einem $\alpha_1 \in K$. Aus $\langle\varphi(v)\rangle \neq \langle v\rangle$ folgt $w_1 \neq 0$. Wäre $\alpha_1 \neq 1$, so wäre $z = (\alpha_1 - 1)^{-1}w_1 + v$ ein Element aus V, für das

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= (\alpha_1 - 1)^{-1}w_1 + w_1 + \alpha_1 v \\ &= \alpha_1 z \end{aligned}$$

gilt. Also wäre $P = p(z) \in \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(V))$.
Unter der bijektiven Abbildung Φ entspricht die Addition in W der Komposition in T, denn es gilt für $\varphi(v) = w_1 + v$ und $\psi(v) = w_2 + v$, sowie $\varphi_{|W} = \psi_{|W} = \mathrm{id}_W$, dass

$$\psi \circ \varphi_{|W} = \mathrm{id}_W$$

und $\psi \circ \varphi(v) = \psi(w_1 + v) = w_1 + w_2 + v$. Also ist $\Phi(\psi \circ \varphi) = w_1 + w_2$. Ohne das extra nachzuprüfen, erhalten wir so auch, dass T eine Untergruppe von $\mathrm{PGL}(V)$ ist.
Ist $\mathbb{P}(\varphi) \in T$, so bildet $\mathbb{P}(\varphi)$ Punkte in $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$ wieder auf Punkte in $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$ ab. Also operiert T in natürlicher Weise auf $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$. Sind $P_1 = p(z_1)$ und $P_2 =$

$p(z_2) \in \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$, also $z_1 = w_1 + \alpha_1 v$ und $z_2 = w_2 + \alpha_2 v$ mit $w_1, w_2 \in W$ sowie $\alpha_1, \alpha_2 \in K^*$, so können wir z_2 durch $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} z_2$ ersetzen, d.h. $\alpha_1 = \alpha_2$ annehmen. Dann erfüllt $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ mit $\varphi_{|W} = \mathrm{id}_W$ sowie $\varphi(v) = \frac{1}{\alpha_1}(w_2 - w_1) + v$, dass $\mathbb{P}(\varphi) \in T$ und $\mathbb{P}(\varphi)(P_1) = P_2$ gilt. Somit operiert T transitiv auf $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$. Ist außerdem $\mathbb{P}(\psi)(P_1) = P_2$ für ein $\mathbb{P}(\psi) \in T$, so dass $\psi_{|W} = \mathrm{id}$ gilt, so folgt $\varphi(z_1) = \lambda\psi(z_1)$ für ein $\lambda \in K^\times$, woraus $w_1 + \alpha_1 v = \lambda w_1 + \lambda\alpha_1\psi(v)$, also $\lambda = 1$ folgt. Somit ist $\varphi(v) = \varphi(z_1 - w_1) = \varphi(z_1) - \varphi(w_1) = \psi(z_1) - \psi(w_1) = \psi(v)$. Daher operiert T auf $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$ in der Tat einfach transitiv. □

Ist $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ eine projektive Hyperebene, so wählen wir eine Basis $B = (b_0, \dots, b_n)(n+1 = \dim V)$ von V mit $W = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$.
Die Bijektion

$$\lambda_B : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(K)$$

bildet dann $\mathbb{P}(W)$ bijektiv auf die Menge $\{[0 : x_1 : \dots : x_n] : x_i \in K, \text{nicht alle } x_i = 0\}$ ab. Also ist

$$\lambda_B(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)) = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(K) : x_0 \neq 0\} =: U_0$$

Ist $x_0 \neq 0$, so gilt $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [1 : \frac{x_n}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}]$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \psi_0 : U_0 & \to & K^n \\ [x_0 : \dots : x_n] & \mapsto & (\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) \end{array}$$

ist bijektiv, wie man leicht nachrechnet.
Setzen wir für alle $i = 0, \dots, n$

$$U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(K) : x_i \neq 0\},$$

so ist die analoge Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \psi_i : U_i & \to & K^n \\ [x_0 : \dots : x_n] & \mapsto & (\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}) \end{array}$$

ebenfalls bijektiv.
Da $\mathbb{P}^n(K) = \bigcup\limits_{i=0}^{n} U_i$ ist, hat man so für jedes $x \in \mathbb{P}^n(K)$ „affine Koordinaten“ $\psi_i(x)$ für alle i mit $x \in U_i$.

9 Kegelschnitte

Wir wollen jetzt gewisse Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ untersuchen. Dabei identfizieren wir Teilmengen, die durch sogenannte euklidische Bewegungen auseinander hervorgehen.

Definition 9.1 Eine Abbildung $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt **euklidische Bewegung** oder **Isometrie** des $\mathbb{R}^n$, falls sie abstandstreu ist, d.h. falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt,

$$||\beta(x) = \beta(y)|| = ||x - y||.$$

Hier ist $||z|| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$ die Länge eines Vektors bezüglich des kanonischen Skalarproduktes im $\mathbb{R}^n$.
In Definition 10.12 (Basiskurs) haben wir definiert, dass eine ***lineare*** Abbildung eine Isometrie ist, wenn sie das kanonische Skalarprodukt erhält. Wir wollen diese Abbildung hier **lineare Isometrien** nennen.

Lemma 9.2 Jede Isometrie $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\beta(0) = 0$ ist eine lineare Isometrie des euklidischen Vektorraums $(V, \langle , \rangle)$ im Sinne von Definition 10.12 (Basiskurs). Insbesondere ist für jede Basis B von $\mathbb{R}^n$ die Koordinatenmatrix $A_{\beta,B,B}$ orthogonal.

Beweis : Ist $\beta(0) = 0$, so gilt $||\beta(x)|| = ||x||$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y\rangle$. Also folgt $\langle \beta(x), \beta(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, β erhält also das kanonische Skalarprodukt. Wir müssen zeigen, dass β linear ist. Es seien $v_1 = \beta(e_1), \dots, v_n = \beta(e_n)$ die Bilder der kanonischen Basisvektoren unter β. Dann ist $v_i^t v_j = \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Wir betrachten die Matrix A mit den Spalten $(v_1, \dots, v_n)$. Diese erfüllt $A^t A = E_n$. Somit ist $A \in O(n, \mathbb{R})$, insbesondere ist A invertierbar. Also ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten die lineare Abbildung $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, die durch $\gamma(v_i) = e_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ definiert ist. Die Koordinatenmatrix von γ bezüglich der kanonischen Basis auf $\mathbb{R}^n$ ist gerade $A^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$. Also ist γ eine lineare Isometrie im Sinne von Definition 10.12 (Basiskurs). Die Abbildung $\gamma \circ \beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lässt das kanonische Skalarprodukt invariant und bildet e_i auf e_i ab für alle $i = 1, \dots, n$. Damit folgt für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle \gamma \circ \beta(x), e_j\rangle = \langle \gamma \circ \beta(x), \gamma \circ \beta(e_j)\rangle = \langle x, e_j\rangle = x_j.$$

Also ist

$$\gamma \circ \beta(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle \gamma^\circ \beta(x), e_j\rangle e_j = \sum x_j e_j = x,$$

d.h. $\gamma \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, woraus $\beta = \gamma^{-1}$, also β linear, folgt. $\square$

Es gibt aber auch Beispiele für Isometrien, die den Nullpunkt nicht festlassen. Für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ ist die **Translation**

$$\begin{aligned} t_b : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x + b \end{aligned}$$

eine affine Abbildung, die offenbar eine Isometrie im Sinne von Definition 9.1 ist.

Satz 9.3 Jede Isometrie $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist die Komposition einer linearen Isometrie mit einer Translation. Jede Isometrie ist also eine affine Abbildung.

Beweis : Es sei $b = \beta(0)$. Die Komposition der Isometrien β und t_{-b} ist offenbar wieder eine Isometrie
$$t_{-b} \circ \beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$
die 0 invariant lässt. Nach Definition 9.1 ist $\gamma = t_{-b} \circ \beta$ eine lineare Abbildung. Also gilt in der Tat $\beta = t_b \circ \gamma$ mit einer linearen Isometrie γ. □

Wir haben im Beweis von Satz 9.3 schon benutzt, dass die Komposition von Isometrien wieder eine Isometrie ist. Wir wollen jetzt zeigen, dass die Menge der Isometrien eine Gruppe bildet.

Lemma 9.4 Jede Isometrie $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist bijektiv, die Umkehrabbildung $\beta^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist wieder eine Isometrie.

Beweis : Nach Satz 9.3 ist $\beta = t_b \circ \gamma$ für ein $b \subset \mathbb{R}^n$ und eine lineare Isometrie γ. Die lineare Abbildung γ ist invertierbar, und γ^{-1} ist ebenfalls eine lineare Isometrie. Die Abbildung t_b ist ebenfalls bijektiv mit Umkehrabbildung t_{-b}. Also ist β bijektiv mit Umkehrabbildung $\beta^{-1} = \gamma^{-1} \circ t_{-b}$. Diese ist als Komposition von Isometrien wieder eine Isometrie. □

Die Menge der Isometrien $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bildet also eine Gruppe. Wir bezeichnen sie mit
$$B_n = \{\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ Isometrie } \}$$
und nennen B_n die Bewegungsgruppe oder die Isometriegruppe des $\mathbb{R}^n$.
Nach Lemma 9.2 ist B_n eine Untergruppe der Gruppe GA $(\mathbb{A}^n(\mathbb{R}))$ der affinen bijektiven Selbstabbildungen des affinen Raums $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$.
Jedes Element $\beta \in B_n$ können wir nach Satz 9.3 schreiben als
$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Ax + b \end{aligned}$$
für ein $A \in O(n, \mathbb{R})$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$.
Wir studieren jetzt die Gruppe B_2 der euklidischen Bewegungen des $\mathbb{R}^2$. Nach Übungsaufgabe 36 ist jedes Element $A \in O(2, \mathbb{R})$ eine Drehung oder eine Spiegelung. Dabei ist A genau dann eine Drehung, wenn det$A = 1$ (und damit $A \in SO(2, \mathbb{R})$ gilt, und genau dann eine Spiegelung, wenn det$A = -1$ ist.

Lemma 9.5 Es sei $Q = \{q_1, \dots, q_n\} \subset \mathbb{R}^2$ eine endliche Teilmenge mit Schwerpunkt

$$s_Q = \frac{1}{n}(q_1 + \cdots + q_n).$$

Dann bildet jede Isometrie $\beta \in B_2$ den Schwerpunkt s_Q auf den Schwerpunkt

$$s_{\beta(Q)} = \frac{1}{n}(\beta(q_1) + \cdots + \beta(q_n))$$

der Menge $\beta(Q) = \{\beta(q_1), \dots, \beta(q_n)\}$ ab.

Beweis : Ist $\beta = t_b$ für ein $b \in \mathbb{R}^2$, so ist $\beta(Q) = \{q_1 + b, \dots, q_n + b\}$. Also folgt

$$\begin{aligned} s_{\beta(Q)} &= \frac{1}{n}(q_1 + b, \dots, q_1 + b) \\ &= \frac{1}{n}(q_1 + \cdots + q_n) + b \\ &= \beta(s_Q). \end{aligned}$$

Ist β eine lineare Isometrie, so gilt

$$\begin{aligned} \beta(s_Q) &= \beta(\frac{1}{n}(q_1 + \cdots + q_n)) \\ &\overset{\beta \text{ linear}}{=} \frac{1}{n}(\beta(q_1) + \cdots + \beta(q_n)) \\ &= s_{\beta(Q)}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 9.4 folgt die Behauptung. □

Die Tatsache, dass Isometrien Schwerpunkte erhalten, wird uns helfen, den folgenden Fixpunktsatz zu beweisen.

Satz 9.6 Jede endliche Untergruppe G von B_2 hat einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in \mathbb{R}^2$ mit $\beta(x) = x$ für alle $\beta \in G$.

Beweis : Es sei $z \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt und $Q = G_z = \{\beta(z) : \beta \in G\}$ die sogenannte Bahn von z unter G. Da G endlich ist, ist Q endlich, d.h. von der Form $Q = \{z_1, \dots, z_r\}$ mit $z_i \in \mathbb{R}^2$. Dabei ist für alle $i = 1, \dots, r$ die Gleichung $z_i = g_i(z)$ für ein $g_i \in G$, und außerdem gibt es für jedes $g \in G$ ein $i = \{1, \dots, r\}$ mit $g(z) = z_i$. Da id $\in G$ ist, gilt $z \in Q$. Nun betrachten wir für beliebiges $g \in G$ die Abbildung

$$\begin{aligned} g : Q &\to \mathbb{R}^2 \\ z_i &\to g(z_i). \end{aligned}$$

Da $z_i = g_i(z)$ gilt, folgt

$$g(z_i) = g(g_i z) = (g \circ g_i)(z) \in Q.$$

Also ist g eine Abbildung von Q nach Q. Da jedes z_i von der Form $z_i = g(z) \in Q$ ist, ist $g : Q \to Q$ surjektiv. Also ist $g(Q) = Q$, woraus $s_{g(Q)} = s_Q$ folgt. Mit Lemma 9.5 folgt somit für alle $g \in G$

$$g(s_Q) = s_{g(Q)} = s_Q,$$

d.h. der Schwerpunkt der Bahn Q ist ein Fixpunkt von G. $\square$

Ist G eine endliche Untergruppe von B_2, so existiert nach Satz 9.6 ein Fixpunkt $x \in \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die Teilmenge

$$G' = t_{-x} G t_x = \{t_{-x^0} g \circ t_x : g \in G\} \subset B_2.$$

Man rechnet leicht nach, dass G' eine Untergruppe von B_2 ist. Mit G ist auch G' endlich. Jedes $g' \in G'$ ist von der Form $g' = t_{-x} \circ g \circ t_x$ für ein $g \in G$, woraus $g'(0) = t_{-x} \circ g \circ t_x(0) = t_{-x}(g(x)) = t_{-x}(x) = 0$ folgt. Also ist 0 ein Fixpunkt von G'. Nach Lemma 9.2 ist G' also eine Untergruppe von $O(2,\mathbb{R})$. Jedes Element $g' \in G'$ ist also eine Drehung oder eine Spiegelung. Kennt man somit alle endlichen Untergruppen G' von $O(2,\mathbb{R})$, so kennt man auch alle endlichen Untergruppen G von B_2.

Beispiel: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\theta = \frac{2\pi}{n}$. Mit

$$d_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in O(2,\mathbb{R})$$

bezeichnen wir die Drehung um den Winkel $\theta \in [0, 2\pi[$. Da $d_\theta^n = \mathrm{id}$ gilt, ist die Menge

$$C_n = \{\mathrm{id}, d_\theta, d_\theta^2, \ldots, d_\theta^{n-1}\}$$

eine Untergruppe von B_2. Eine solche Gruppe, die nur aus Potenzen eines Elementes besteht, heißt zyklisch. C_n besteht also aus allen Drehungen um den Winkel $k\frac{2\pi}{n}, k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Eine weitere interessante Gruppe ist die **Diedergruppe** D_n. Definitionsgemäß ist

$$D_n = \{d_\theta^i s^j : i = 0, \ldots, n-1, j = 0, 1\}$$

für die Drehung d_θ und die Spiegelung $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ an der „x-Achse“.

Es ist $sd_\theta s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = d_\theta^{n-1}$, da

$$\begin{aligned} \cos\theta = \cos(2\pi - \theta) &= \cos((n-1)\theta) \text{ und} \\ \sin\theta = -\sin(2\pi - \theta) &= -\sin((n-1)\theta) \end{aligned}$$

gilt. Also folgt mit $s^2 = \mathrm{id}$

$$sd_\theta^i = sd_\theta^i s^2 = (sd_\theta s)^i s = (d_\theta^{n-1})^i s = d_\theta^k s \in D_n,$$

wobei $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ der Rest von $i(n-1)$ bei Division durch n ist.
Da $s^2 = 1$ ist, liegen also beliebige Produkte von Potenzen von s und d_θ in D_n. Also ist die Teilmenge D_n von B_2 abgeschlossen unter der Verknüpfung von Isometrien. Ferner ist $\mathrm{id} = d_\theta^0 s^0 \in D_n$. Da $(d_\theta^i s^j)^{-1} = s^j d_\theta^{n-i}$ ist, ist D_n auch abgeschlossen unter Inversenbildung. Somit ist D_n eine Untergruppe von B_2. Man sagt, D_n ist von s und d_θ erzeugt. In D_n gelten die Relationen $d_\theta^n = \mathrm{id}$, $s^2 = \mathrm{id}$, $sd_\theta = d_\theta^{n-1}s$. Es gilt

i) $D_1 = \{1, s\}$ mit $s^2 = 1$

ii) $D_2 = \{1, d, s, ds\}$ mit $d = d_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) Man kann zeigen, dass $D_3 \simeq \mathcal{S}_3$ ist, wobei $\mathcal{S}_n$ die symmetrische Gruppe ist. Für $n \geq 4$ kann man eine solche Isomorphie nicht mehr erwarten, da D_3 $2n$ Elemente, S_n aber $n!$ Elemente hat.

Man kann sich D_n vorstellen als Symmetriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks mit Mittelpunkt.

Definition 9.7 Zwei Untergruppen G_1 und G_2 von B_2 heißen **konjugiert**, wenn es ein $g \in B_2$ mit $g^{-1}G_1 g = G_2$ gibt.

Wir haben uns oben überlegt, dass jede endliche Untergruppe von B_2 konjugiert zu einer Untergruppe von $O(2, \mathbb{R})$ ist.

Satz 9.8 Jede endliche Untergruppe G von B_2 ist konjugiert zu C_n oder zu D_n für geeignetes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis : Wir können nach der obigen Bemerkung annehmen, dass G eine Untergruppe von $O(2, \mathbb{R})$ ist. Da $C_1 = \{\mathrm{id}\}$ ist, können wir $G \neq \{\mathrm{id}\}$ annehmen. Sind alle Elemente von G Drehungen, so sei θ die kleinste positive Zahl mit $d_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in G$. Ist d_α ein weiteres Element aus G mit $\alpha \in [0, 2\pi[$, so schreiben wir $\alpha = k\theta + \beta$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq \beta < \theta$. Da G eine Gruppe ist, liegt $(d_\theta)^{-k} d_\alpha = d_\beta$ in G. Aufgrund der Minimalität von θ folgt $\beta = 0$, also $d_\alpha = d_\theta^k$. Also ist $G \subset \{\mathrm{id}, d_\theta, d_\theta^2, \dots\}$. Da $d_\theta^{-1} \in G$ ist, gilt $d_\theta^{-1} = d_\theta^{n-1}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, woraus

$d_\theta^n = \mathrm{id}$ folgt. Wir wählen n minimal mit $d_\theta^n = \mathrm{id}$. Dann folgt $\theta = \frac{2\pi}{n}$ und $G = C_n$. Sind nicht alle Elemente von G Deutungen, so enthält G eine Spiegelung

$$s' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

an der Geraden, die im Winkel $\frac{\varphi}{2}$ zur Geraden $\langle \binom{1}{0} \rangle$ steht.
Es ist $d_{-\varphi/2} s' d_{\varphi/2} \in O(2, \mathbb{R})$ ein Element mit Determinante (-1), also eine Spiegelung. Da $d_{-\varphi/2} s' d_{\varphi/2}$ den Vektor $\binom{1}{0}$ festläßt, folgt also $d_{-\varphi/2} s' d_{\varphi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = s$. (Das kann man auch durch Matrixmultiplikation nachprüfen.) Also enthält $G' = d_{-\varphi/2} G d_{\varphi/2}$ die Spiegelung s. Sei $H \subset G'$ die Teilmenge, die aus allen Drehungen in G' besteht, d.h. $H = G' \cap SO(2, \mathbb{R})$. Nach dem ersten Schritt des Beweises ist also $H = C_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun $G' = D_n$. Da s und d_θ für $\theta = \frac{2\pi}{n}$ in G' liegen, ist $D_n \subset G'$. Ist $g \in G'$ eine Drehung, so ist $g \in H = C_n$. Ist g eine Spiegelung, so ist $\det(gs) = 1$, d.h. $gs \in H = C_n$. Also ist $g = gs^2 = (gs)s \in D_n$. Daher folgt $G' = D_n$. □

Jetzt wollen wir Kegelschnitte untersuchen.

Definition 9.9 Ein **Kegelschnitt** $K_{A,b,\gamma}$ ist die Menge aller Lösungen $x \in \mathbb{R}^2$ einer Gleichung der Form

$$x^t A x + b^t x + \gamma = 0$$

für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, ein $b \in \mathbb{R}^2$ und einen Skalar $\gamma \in K$.
Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ und $\gamma \in K$, so ist also

$$K_{A,b,\gamma} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + \gamma = 0 \}$$

ein Kegelschnitt.

Wir wollen nun die Teilmengen $K_{A,b,\gamma}$ von $\mathbb{R}^2$ geometrisch, bis auf Isometrie, beschreiben. Zwei Kegelschnitte $K_{A,b,\gamma}$ heißen **kongruent**, falls es eine Isometrie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(K_{A,b,\gamma}) = K_{A',b',\gamma'}$ gibt. Ein Kegelschnitt $K_{A,b,\gamma}$ heißt **entartet**, falls $K_{A,b,\gamma}$ ein Paar von Geraden, eine einzelne Gerade, ein Punkt oder die leere Menge ist.

Satz 9.10 Jeder nicht entartete Kegelschnitt $K_{A,b,\gamma}$ ist kongruent zu einer der folgenden Typen:

i) Ellipse: $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 - 1 = 0$

ii) Hyperbel: $a_{11}x_1^2 - a_{22}x_2^2 - 1 = 0$

iii) Parabel: $a_{11}x_1^2 - x_2 = 0$.

Hier sind jeweils $a_{11} > 0$ und $a_{22} > 0$.

Beweis : Da A symmetrisch ist, gibt es nach dem Spektralsatz ein $P \in O(n, \mathbb{R})$, so dass $P^{-1}AP = P^tAP$ eine Diagonalmatrix ist. P ist eine Isometrie mit $P(K_{A,B,\gamma}) = K_{PAP^{-1},Pb,\gamma}$. Ist nämlich $x \in K_{A,b,\gamma}$, so gilt

$$0 = (Px)^t PAP^{-1}(Px) + b^t(P^tPx) + \gamma,$$

also ist $Px \in K_{PAP^{-1},Pb,\gamma}$.
Ist umgekehrt $y \in K_{PAP^{-1},Pb,\gamma}$, so ist $P^{-1}y \in K_{A,b,\gamma}$ mit einer analogen Rechnung. Indem wir zu einem kongruenten Kegelschnitt übergehen, können wir also annehmen, dass $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix ist. Dann ist

$$K_{A,b,\gamma} = \{x : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + \gamma = 0\}.$$

1. Fall: $a_{11} \neq 0$ und $a_{22} \neq 0$. Wir betrachten die Translation t_c für $c = \left(\frac{b_1}{2a_{11}}, \frac{b_2}{2a_{22}}\right)^t$.
Es ist $t_c(K_{A,b,\gamma}) = K_{A,(b-A^tc-Ac),\gamma c}$, wie aus der Identität

$$x^tAx + b^tx + \gamma = (x+c)^tA(x+c) + (-c^tA - c^tA^t + b^t)(x+c) + \gamma_c$$

mit $\gamma_c = c^tA^tc - b^tc + \gamma$ folgt. Nun ist $b - A^tc - Ac = 0$, so dass $K_{A,b,\gamma}$ kongruent zu $K_{A,0,\gamma}$ für $\gamma' = \gamma_c \in \mathbb{R}$ ist.

Es ist $K_{A,0,\gamma} = \{\binom{x_1}{x_2} : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \gamma' = 0\}$. Ist $\gamma' = 0$, so ist $K_{A,0,0}$ entweder $\emptyset$, der Nullpunkt oder besteht aus zwei Geraden. In jedem Fall ist $K_{A,0,0}$ also entartet. Ist $\gamma' \neq 0$, so ist

$$K_{A,0,\gamma'} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : -\frac{a_{11}}{\gamma'}x_1^2 - \frac{a_{22}}{\gamma'}x_2^2 - 1 = 0 \right\}.$$

Ist $K_{A,0,\gamma'} \neq \emptyset$, so ist mindestens einer der Koeffizienten $-\frac{a_{11}}{\gamma'}$ und $-\frac{a_{22}}{\gamma'}$ positiv, und $K_{A,0,\gamma'}$ ist eine Ellipse oder eine Hyperbel, nachdem wir eventuell noch mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die Koordinaten vertauschen.
2. Fall: $a_{22} = 0, a_{11} \neq 0$. Dann ist $K_{A,b,\gamma} = \{x : a_{11}x_1^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + \gamma = 0\}$.

Wie im ersten Fall kann man mit der Translation t_c für $c = (\frac{b_1}{2a_{11}}, 0)$ den Kegelschnitt $K_{A,b,\gamma}$ überführen in den kongruenten Kegelschnitt $K_{A,b',\gamma'}$ für ein $\gamma' \in \mathbb{R}$ und den Vektor $b' = \binom{0}{b_2}$. Ist $b_2 \neq 0$, so wenden wir die Translation t_c mit $c = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma'/b_2^{-1} \end{pmatrix}$ an. Das überführt $K_{A,b',\gamma'}$ in den kongruenten Kegelschnitt

$$K_{A,B',0} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : a_{11}x_1^2 + b_2x_2 = 0\} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : -\frac{a_{11}}{b_2}x_1^2 - x_2 = 0\}$$

Ist $-\frac{a_{11}}{b_2} > 0$, so ist dies eine Parabel. Ist $-\frac{a_{11}}{b_2} < 0$, so wenden wir die Spiegelung $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ auf $K_{A,b',0}$ an und erhalten so die zu $K_{A,b',0}$ kongruente Parabel

$$\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : -\frac{a_{11}}{b_2}x_1^2 + x_2 = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \frac{a_{11}}{b_2}x_1^2 - x_2 = 0\right\}.$$

Ist $b_2 = 0$ so ist $K_{A,b',\gamma'} = \left\{\binom{x_1}{x_2} : a_{11}x_1^2 + \gamma = 0\right\}$. Dieser Kegelschnitt ist entartet. Ist $-\frac{\gamma}{a_{11}} < 0$, so ist er leer, ist $-\frac{\gamma}{a_{11}} = 0$, so handelt es sich um eine Gerade, und ist $-\frac{\gamma}{a_{11}} > 0$, um ein Geradenpaar.

9. Fall: $a_{22} \neq 0, a_{11} = 0$.

Das kann man durch Vertauschen der Variablen x_1 und x_2 genau wie den zweiten Fall behandeln.

4. Fall: $a_{11} = 0, a_{22} = 0$.

Dann ist $K_{A,b,\gamma} = \left\{\binom{x_1}{x_2} : b_1x_1 + b_2x_2 + \gamma = 0\right\}$. Hier rechnet man leicht nach, dass $K_{A,b,\gamma}$ entartet ist. $\square$