Skript zur Vorlesung

Gebäude

Sommersemester 2012
Frankfurt am Main

Prof. Dr. Annette Werner

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Gebäude sind kombinatorische Objekte (genauer gesagt Simplizialkomplexe), die besonders in der Strukturtheorie von Gruppen eine wichtige Rolle spielen.

Wir werden später solche Gebäude als Vereinigung von Apartments, die Coxeterkomplexe sind, definieren. Danach zeigen wir, dass man bestimmten Gruppen ein Gebäude zuordnen kann, auf dem die Gruppe in interessanter Weise operiert.

Mittlerweile hat man in mühevoller Arbeit sämtliche endlichen nichtabelschen einfachen Gruppen klassifiziert. Es gibt bis auf Isomorphie die folgenden drei Typen:

1. alternierende Gruppen
2. endliche Gruppen vom Lietyp
3. 26 sporadische Gruppen

Alle endlichen Gruppen vom Lietyp besitzen etwa ein Gebäude. Ein Beispiel für eine solche Gruppe ist die Gruppe

$$PSL_n(\mathbb{F}_p) = SL_n(\mathbb{F}_p) \Big/ \left\{ \begin{pmatrix} d & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d \end{pmatrix} : d^n = 1 \right\}.$$

Bevor wir die allgemeine Theorie entwickeln, studieren wir ein Beispiel.

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem beliebigen Körper K. Wir betrachten die Menge aller nicht-trivialen Unterräume von V:

$$X(V) = \{W \subset V : 0 \neq W \neq V \text{ Untervektorraum}\}$$

Wir nennen jede aufsteigende Kette von Unterräumen

$$(F) \quad 0 \neq W_1 \subsetneqq W_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq W_k \subsetneqq V$$

eine Flagge in V. Die Zahl k heißt Länge der Flagge (F). Wir sagen, die Flagge (F) ist in der Flagge

$$(F') : 0 \subsetneqq W_1' \subsetneqq \ldots \subsetneqq W_{k'} \subsetneqq V$$

enthalten, wenn $\{W_1, \ldots, W_k\} \subset \{W_1', \ldots, W_k'\}$ ist, d.h., wenn (F') eine Verfeinerung von (F) ist. Ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V, so ist

$$0 \neq \langle b_1 \rangle \subset \langle b_1, b_2 \rangle \subset \ldots \subset \langle b_1, \ldots, b_n \rangle = V$$

eine Flagge der Länge $n-1$. Diese ist maximal, d.h. in keiner echt größeren Flagge enthalten.

Ist (F) eine beliebige Flagge, so können wir stets eine maximale Flagge finden, die (F) enthält.

Definition 1.1 *Der Flaggenkomplex $\triangle(V)$ ist die partiellgeordnete Menge aller Flaggen (F) in V zusammen mit der Relation $(F) \subset (F')$.*

Die Gruppe $GL(V)$ operiert auf $\triangle(V)$, indem wir für jedes $g \in GL(V)$ die Flagge

$$(F) \qquad 0 \subsetneqq W_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq W_k \subsetneqq V$$

auf

$$(gF) \qquad 0 \subsetneqq gW_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq gW_k \subsetneqq V$$

abbilden. Analog operiert auch $SL(V)$ und $PGL(V) = GL(V) / \left\{ \begin{pmatrix} d & & \\ & \ddots & \\ & & d \end{pmatrix} : d \in K^\times \right\}$ auf $\triangle(V)$.

Lemma 1.2 *$GL(V)$ operiert transitiv auf der Menge der maximalen Flaggen.*

Beweis : Jede maximale Flagge (F) ist von der Form

$$0 \neq \langle b_1 \rangle \subsetneqq \langle b_1, b_2 \rangle \subsetneqq \ldots \subsetneqq V$$

für eine Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V. Daraus folgt die Behauptung. □

Die partiell geordnete Menge $\triangle(V)$ besteht aus endlichen Teilmengen von $X(V)$. Sie hat folgende Eigenschaft: Jede Teilmenge einer Flagge ist wieder eine Flagge. Daher ist $\triangle(V)$ ein abstrakter Simplizialkomplex im Sinne der folgenden Definition.

Definition 1.3 *Eine Familie $\triangle$ von endlichen Teilmengen einer Menge X ist ein abstrakter Simplizialkomplex, falls für jedes $X \in \triangle$ und jedes $Y \subset X$ auch*

$$Y \in \triangle$$

gilt. $\triangle$ ist also abgeschlossen unter Teilmengenbildung.

Die Elemente von $\triangle$ heißen Seiten des Simplizialkomplexes. Die Eckenmenge eines Simplizialkomplexes ist die Menge

$$V(\triangle) = \bigcup_{F \in \triangle} F \subset X.$$

Eine maximale Seite F (d.h. eine Seite F, die nicht in einer echt größeren Seite enthalten ist), heißt Facette von $\triangle$.

Abstrakte Simplizialkomplexe haben geometrische Realisierungen. Ist $\triangle$ ein abstrakter Simplizialkomplex, so definieren wir $\mid \triangle \mid$ als die Teilmenge aller Tupel $t \in [0,1]^X = \{t : X \to [0,1]\}$, die folgende Bedingungen erfüllen:

i) $\sum_{x \in X} t_x = 1$

ii) $\{x \in X : t_x > 0\} \in \triangle$.

Beispiel: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $X = \{1, \ldots, n\}$ und $\triangle = \mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Dann ist $\triangle$ offenbar ein abstrakter Simplizialkomplex.

$\mid \triangle \mid$ ist die Teilmenge $\{(t_1, \ldots, t_n) : \sum t_i = 1\}$ von $\mathbb{R}^n$, also ist $\mid \triangle \mid$ das Standard $(n-1)-$ Simplex im $\mathbb{R}^n$.

Ist X eine endliche Menge, so ist $[0,1]^X$ in einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}-$Vektorraum enthalten. Daher trägt $\mid \triangle \mid$ auf natürliche Weise eine Relativtopologie. Für unendliche Mengen X kann man ebenfalls eine Topologie auf $\mid \triangle \mid$ definieren. Wir nehmen im folgenden an, dass V ein Vektorraum über einem **endlichen** Körper ist. Dann ist $X(V)$ endlich und wir können dem Simplizialkomplex $\triangle(V)$ seine geometrische Realisierung

$$\mid \triangle(V) \mid$$

in einem $\mathbb{R}^N$ zuordnen. Dies ist das sphärische Gebäude zur Gruppe $GL(V)$, wie wir später sehen werden.

Wenn V eindimensional ist, so ist $X(V) = \emptyset$. Ist V zweidimensional, so besteht $X(V)$ aus allen Geraden in V. In diesem Fall gibt es nur Einpunktmengen als Flaggen, der Simplizialkomplex $\triangle(V)$ besteht also aus endlich vielen Punkten. Das ist topologisch nicht so interessant.

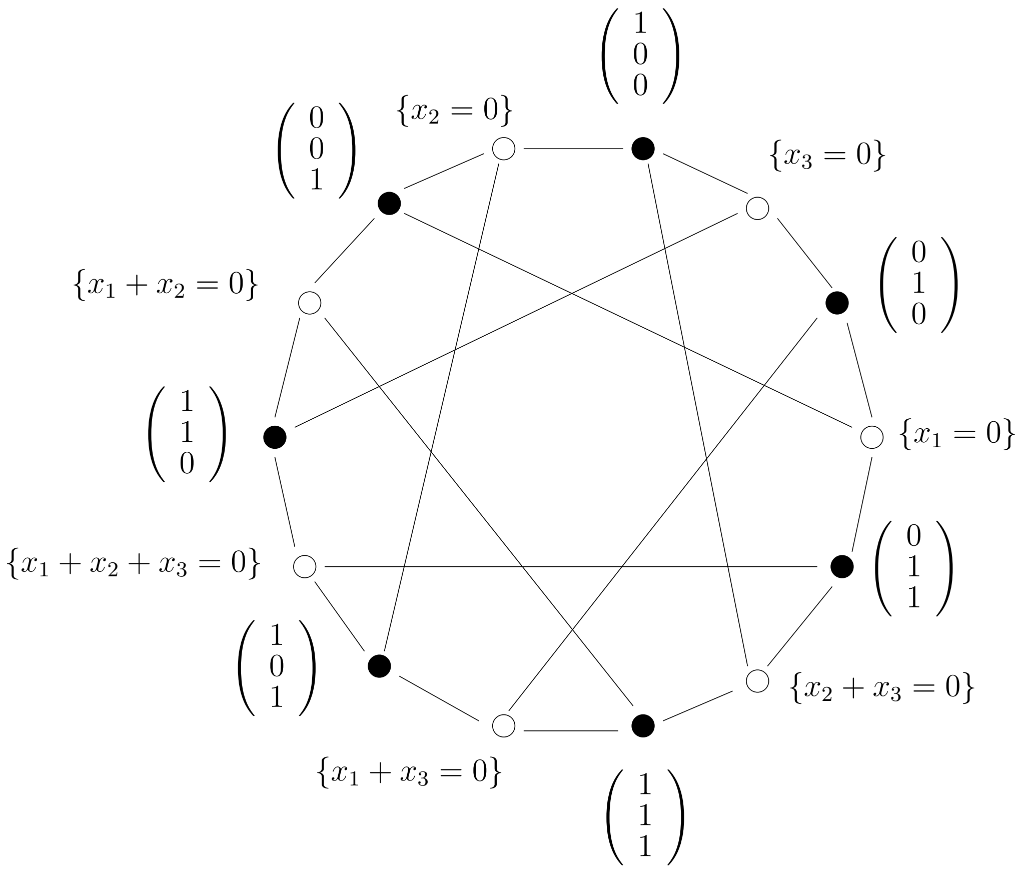
Der erste interessante Fall ist $\dim V = 3$. Wir nehmen $K = \mathbb{F}_2$ an und identifizieren V mit $\mathbb{F}_2^3$ nach Wahl einer Basis. Dann enthält V die sieben Geraden (hier durch einen Erzeuger angegeben)

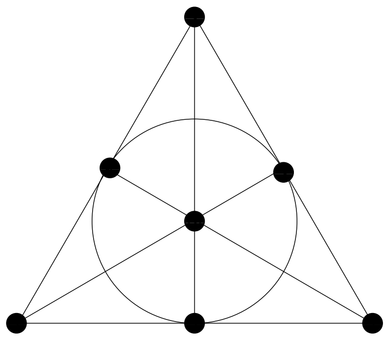
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die sieben Ebenen, die wir jeweils als Kern einer linearen Abbildung beschreiben:

$$\{x_1 = 0\ ,\ x_2 = 0\ ,\ x_3 = 0\ ,\ x_1 + x_2 = 0\ ,\ x_1 + x_3 = 0\ ,\ x_2 + x_3 = 0\ ,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

$\triangle(V)$ enthält außer diesen vierzehn Einpunktflaggen auch noch $7 \cdot 3 = 21$ Flaggen, denn für jede Gerade gibt es genau drei Ebenen, die die Gerade enthalten. Wir können den abstrakten Simplizialkomplex $\triangle(V)$ folgendermaßen als Graph zeichnen, dessen Ecken die Ecken des Simplizialkomplexes sind und dessen Kanten den Flaggen der Länge 2 entsprechen:





Dies ist der Inzidenzgraph der sogenannten Fano-Ebene.

Für einen beliebigen $k-$Vektorraum V nennen wir jede Teilmenge von $\triangle(V)$ der Form

$$\triangle(B) = \{(F) : (F) \text{ ist in der durch } B \text{ definierten maximalen Flagge enthalten}\}$$

für eine Basis B von V ein Apartment von $\triangle(V)$. Wir werden später sehen, dass solche Apartments Coxeterkomplexe sind.

2 Coxetergruppen

Sei S eine endliche Menge. Dann ergänzen wir S um neue Symbole $S^{-1} = \{s^{-1} : s \in S\}$. Ein **Wort über** $\mathbf{S} \cup S^{-1}$ ist dann eine endliche Folge von Elementen aus $S \cup S^{-1}$. Wir nennen auch die leere Folge ein Wort.

Beispiel:

i) Ist $S = \{s\}$, so ist ein Wort eine Folge der Form

$$s^{k_1} s^{-k_2} s^{-k_3} \dots s^{-k_m}$$

für $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{Z}$.

ii) Ist $S = \{s_1, s_2\}$, so sind etwa

$$s_1 s_2 s_1 \ , \ s_1 s_1^{-1} s_1 s_2 s_1$$

Wörter über $S \cup S^{-1}$.

Wir nennen ein Wort $w = s_1 \cdots s_q$ über $S \cup S^{-1}$ **reduziert**, falls für alle $i = 1, \dots, q-1$ gilt:

$$s_{i+1} \neq s_i^{-1},$$

wobei wir für alle $s^{-1} \in S^{-1}$

$$(s^{-1})^{-1} = s$$

setzen.

Beispiel: Das Wort $s_1 s_2 s_1^{-1}$ aus dem obigen Beispiel ii) ist reduziert, das Wort $s_1 s_1^{-1} s_1 s_2 s_1$ ist nicht reduziert.

Definition 2.1 *Die Menge F_S aller reduzierten Wörter über $S \cup S^{-1}$ zusammen mit der Hintereinanderschaltung von Wörtern (gefolgt vom Streichen aller ss^{-1} an der Schnittstelle) bildet eine Gruppe, deren neutrales Element das leere Wort ist. F_S heißt die von S erzeugte freie (nicht-abelsche) Gruppe. Wir schreiben die Gruppenoperation multiplikativ und bezeichnen das leere Wort mit 1.*

Definition 2.2 *Eine beliebige Gruppe G heißt endlich erzeugt, falls es eine freie Gruppe F_S für eine endliche Menge S gibt, so dass ein surjektiver Gruppenhomomorphismus*

$$\varphi : F_S \to G$$

existiert.

Eine Gruppe G ist also genau dann endlich erzeugt, wenn es endlich viele Elemente $g_1, \dots, g_n \in G$ gibt, so dass jedes $g \in G$ als Produkt der g_i und ihrer Inversen geschrieben werden kann. Wir nennen $\{g_1, \dots, g_n\}$ dann ein Erzeugendensystem von G.

Ist $\varphi : F_S \to G$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, so bezeichnet man die Elemente im Kern von φ als Relationen von φ und nennt φ auch eine Präsentation von G.

Wir betrachten nun eine endliche, multiplikativ geschriebene Gruppe W mit einem endlichen Erzeugendensystem S, so dass gilt

i) $1 \notin S$

ii) jedes $s \in S$ hat Ordnung 2, d.h. es gilt $s^2 = 1$.

Beispiel: Jede Permutationsgruppe $\mathcal{S}_n$ ist erzeugt von Transpositionen, also von Elementen der Ordnung 2.

Definition 2.3 *Für $s, s' \in S$ bezeichnen wir mit $m(s, s')$ die Ordnung von ss' in W. Es sei*

$$\varphi : F_S \to W$$

der surjektive Gruppenhomomorphismus, der ein Wort $s_1 \dots s_q$ auf das Produkt $s_i \cdot \ldots \cdot s_q$ in W abbildet. (W, S) heißt Coxetersystem, falls gilt

(C) Kern (φ) ist der kleinste Normalteiler in F_S, der für alle $s, s' \in S$ das Element

$$(ss')^{m(ss')}$$

enthält.

Wir nennen W dann auch eine Coxetergruppe und unterschlagen das Erzeugendensystem S.

Beispiele:

i) Die triviale Gruppe $W = \{1\}$ zusammen mit $S = \emptyset$ ist ein Coxetersystem.

ii) Die Gruppe $W = \{\pm 1\}$ mit $S = \{-1\}$ ist ein Coxetersystem. Hier ist $F_S \simeq \mathbb{Z}$ und $\varphi : F_S \simeq \mathbb{Z} \to \{\pm 1\} = W$ der Homomorphismus $m \mapsto (-1)^m$.

iii) Jetzt betrachten wir ein Erzeugendensystem $S = \{s, t\}$ mit zwei Elementen. Es sei $N \subset F_S$ der kleinste Normalteiler, der die Elemente s^2, t^2 und $(st)^m$ enthält. Dann ist die Quotientengruppe
$$D_{2m} = F_S/N$$
zusammen mit S ein Coxetersystem. Die Gruppe D_{2m} heißt **Diedergruppe**.

In D_{2m} gilt also $s = s^{-1}, t = t^{-1}$ und $(st)^m = 1$. Daher ist jedes Element aus D_{2m} das Bild eines der Elemente
$$1, s, st, sts, \dots, (st)^{m-1}s.$$

Somit hat D_{2m} höchstens $2m$ Elemente.

Wir wollen nun durch eine alternative Beschreibung zeigen, dass D_{2m} genau $2m$ Elemente hat.

Dazu betrachten wir die Menge

$$G = \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

versehen mit der folgenden Verknüpfung:

$$(\epsilon, x) \cdot (\epsilon', x')$$
$$= (\epsilon\epsilon', \epsilon' x + x').$$

Man rechnet leicht nach, dass diese Verknüpfung assoziativ ist und das neutrale Element $(1, 0)$ besitzt.

Da für alle $\epsilon \in \{\pm 1\}$ und $x \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$$(\epsilon, x) \cdot (\epsilon, -\epsilon x) = (1, \epsilon x - \epsilon x) = (1, 0) = (\epsilon, -\epsilon x) \cdot (\epsilon, x)$$

ist, besitzt G inverse Elemente. Somit ist G eine Gruppe. Offenbar hat G $2m$ Elemente. In G gilt für

$$\sigma = (-1, 0) \text{ und } \tau = (-1, 1 + m\mathbb{Z}) :$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (1, 0) \\ \tau^2 &= (1, 0) \text{ und} \\ \sigma\tau &= (1, 1 + m\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

woraus $(\sigma\tau)^m = (1, 0)$ folgt.

Wir betrachten den eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\psi : F_{\{s,t\}} \to G,$$

der s auf σ und t auf τ abbildet. Er ist surjektiv und sein Kern ist ein Normalteiler, der s^2, t^2 und $(st)^m$ enthält. Nach dem Homomorphiesatz faktorisiert ψ durch einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\psi} : D_{2m} \to G.$$

Da $| D_m | \leqq 2m$ und $| G | = 2m$ gilt, ist $\tilde{\psi}$ ein Isomorphismus, und es gilt $| D_m | = 2m$.

Wir wollen jetzt Coxetergruppen geometrisch beschreiben.

Definition 2.4 *Sei (W, S) ein endliches Coxetersystem mit $S = \{s_1, \ldots, s_N\}$ und $(e_1, \ldots, e_N)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^N$. Dann definieren wir eine symmetrische Bilinearform*

$$B(-, -)$$

auf $\mathbb{R}^N$ durch

$$B(e_i, e_j) = -\cos \frac{\pi}{m(i, j)},$$

wobei wir $m(i, j) = m(s_i, s_j) = ord\ (s_i, s_j)$ schreiben.

Für $i = 1, \ldots, N$ betrachten wir nun die lineare Abbildung $r_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, definiert durch

$$r_i(v) = v - 2B(e_i, v)e_i$$

Dann ist

$$\begin{aligned} r_i(e_i) &= e_i - B(e_i, e_i)e_i \\ &= -e_i. \end{aligned}$$

Für jeden bezüglich B zu e_i orthogonalen Vektor v, d.h. für alle v mit $B(e_i, v) = 0$ gilt $r_i(v) = v$.

Mit $\langle e_i \rangle^\perp = \{v \in V : B(e_i, v) = 0\}$ bezeichnen wir das orthogonale Komplement von $v \in V$ bezüglich B.

Da e_i anisotrop ist (d.h. da $B(e_i, e_i) \neq 0$ gilt), ist

$$V = \langle e_i \rangle \oplus \langle e_i \rangle^\perp.$$

Somit ist $r_i \in GL_N(\mathbb{R})$ die Spiegelung an der Hyperebene $\langle e_i \rangle^\perp$ in $\mathbb{R}^N$ bezüglich der Bilinearform B.

Lemma 2.5 *Für alle $v, w \in \mathbb{R}^N$ gilt*

$$B(r_i v, r_i w) = B(v, w).$$

Beweis : Wir berechnen

$$\begin{aligned} B(r_i v, r_i w) &= B\big(v - 2B(e_i, v)e_i, w - 2B(e_i, w)e_i\big) \\ &= B(v, w) - 2B(e_i, v)B(e_i, w) - 2B(e_i, w)B(e_i, v) + 4B(e_i, v)B(e_i, w)B(e_i, e_i) \\ &= B(v, w), \end{aligned}$$

da $B(e_i, e_i) = 1$ gilt. $\square$

Satz 2.6 *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} S &\to GL_N(\mathbb{R}) \\ s_i &\mapsto r_i \end{aligned}$$

lässt sich zu einem Gruppenhomomorphismus

$$W \to GL_N(\mathbb{R})$$

fortsetzen. Für alle i, j gilt

$$ord(r_i r_j) = ord(s_i s_j).$$

Beweis : Wir zeigen zunächst für alle $i, j \in \{1, \ldots, N\}$

$$\mathrm{ord}(r_i r_j) = \mathrm{ord}(s_i s_j).$$

Für $i = j$ sind beide Seiten gleich eins, also können wir $i \neq j$ annehmen. Es sei $V = \langle e_i, e_j \rangle \subset \mathbb{R}^N$. Dann wird V von r_i und r_j in sich überführt, und es gilt

$$\mathbb{R}^N = V \oplus V^\perp.$$

Auf $V^\perp$ operieren r_i und r_j trivial. Die Einschränkung von B auf V hat die Koordinatenmatrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix} B(e_i, e_i) & B(e_i, e_j) \\ B(e_j, e_i) & B(e_j, e_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \mu \\ \mu & I \end{pmatrix}$$

für $\mu = -\cos \frac{\pi}{\mathrm{ord}(s_i s_j)} \in]-1, 0]$.

Da Γ nach dem Hauptminorenkriterium positiv definit ist, ist $B\,|_{V \times V}$ ein Skalarprodukt. Also ist das Produkt der zwei Spiegelungen r_i und r_j eine Drehung um den zweifachen Winkel zwischen w und v, wobei $w \in \langle e_i \rangle^\perp$ und $v \in \langle e_j \rangle^\perp$ Erzeuger der Fixgeraden der Spiegelungen sind. Um die Orientierung des Winkels kümmern wir uns hier nicht. Wir können etwa

$$\begin{aligned} w &= e_j - B(e_j, e_i) e_i = e_j - \mu e_i \\ \text{und } v &= e_i - B(e_i, e_j) e_j = e_i - \mu e_j \end{aligned}$$

wählen. Dann ist

$$\begin{aligned} \cos \sphericalangle(v, w) &= \frac{B(v, w)}{\sqrt{B(w, w)}\sqrt{B(v, v)}} \\ &\overset{B(w,w)=B(v,v)}{=} \frac{B(v, w)}{B(v, v)} \\ &= \frac{\mu - \mu - \mu + \mu^3}{1 - \mu^2 - \mu^2 + \mu^2} = \frac{\mu^3 - \mu}{1 - \mu^2} \\ &= -\mu = \cos \frac{\pi}{\mathrm{ord}(s_i s_j)} \end{aligned}$$

Somit ist $r_i r_j$ eine Drehung um $2\sphericalangle(v, w) = 2\frac{\pi}{\mathrm{ord}(s_i s_j)}$, hat also die Ordnung $\mathrm{ord}(s_i s_j)$.

Nun betrachten wir den Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : F_S \to GL_N(\mathbb{R}),$$

der ein Wort $s_1 \ldots s_q$ auf das Produkt $r_1 \cdot \ldots \cdot r_q$ abbildet. Der Kern von φ ist ein Normalteiler, der alle $(s_i s_j)^{m(s_i, s_j)}$ enthält. Also faktorisiert φ durch einen Gruppenhomomorphismus

$$\psi : W \to GL_N(\mathbb{R}).$$

□

Definition 2.7 *Sei (W, S) ein Coxetersystem. Für jedes $w \in W$ mit $w \neq 1$ definieren wir*

$$l(w) = \min\{k \geqq 1 : w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_k \text{ für } s_1, \ldots, s_k \in S\}.$$

Außerdem setzen wir $l(1) = 0$. Wir nennen $l(w)$ die Wortlänge von w.

Definition 2.8 *Es sei (W, S) ein Coxetersystem. Dann nennen wir jedes zu einem $s \in S$ konjugierte Element in W eine Spiegelung. Die Menge der Spiegelungen ist somit*

$$\Gamma = \{wsw^{-1} : w \in W, s \in S\}.$$

Die Menge $\mathcal{H} = \Gamma \times \{\pm 1\}$ heißt Menge der Halbräume. Für $h = (w, \epsilon) \in \mathcal{H}$ und $s \in S$ definieren wir

$$sh = \begin{cases} (w, -\epsilon) = (sws, -\epsilon) & \textit{falls } s = w \\ (sws, \epsilon) & \textit{falls } s \neq w \end{cases}$$

Das liefert eine Operation von S auf $\mathcal{H}$.

Lemma 2.9 *Es seien $s_1, \ldots, s_q$ in S. Wir definieren Elemente in Γ durch $h_1 = s_1, h_2 = s_1 s_2 s_1, h_3 = (s_1 s_2) s_3 (s_2 s_1), \ldots, h_q = (s_1 \cdot \ldots \cdot s_{q-1}) s_q (s_{q-1} \cdot \ldots \cdot s_1)$. Dann gilt*

$$\{h \in \Gamma : \; s_q \cdot \ldots \cdot s_1(h, \epsilon) = \big((s_q \ldots s_1) h (s_1 \ldots s_q), -\epsilon\big)\} \subset \{h_1, \ldots, h_q\}.$$

Beweis : Nach Definition der Operation von S auf $\mathcal{H}$ ist

$$s(h, \epsilon) = (shs, -\epsilon)$$

(d.h. es passiert ein Vorzeichenwechsel im zweiten Argument) nur dann der Fall, wenn $h = s$. Angenommen, bei $s_1(h, \epsilon), s_2 s_1(h, \epsilon), \ldots, (s_k \ldots s_1)(h, \epsilon)$ passiert kein Vorzeichenwechsel, aber bei $s_{k+1} \ldots s_1(h, \epsilon)$ wird das Vorzeichen im zweiten Argument gewechselt. Dann ist

$$s_k \ldots s_1(h, \epsilon) = (s_k \ldots s_1 h s_1 \ldots s_k, \epsilon)$$

und

$$s_{k+1} \ldots s_1(h, \epsilon) = (s_k \ldots s_1, h s_1, \ldots s_k, -\epsilon)$$

und es gilt $s_{k+1} = s_k \ldots s_1, h s_1, \ldots s_k$, also $h = h_{k+1}$.

Für $h \notin \{h_1, \ldots, h_q\}$ passiert also nie ein Vorzeichenwechsel. □

Korollar 2.10 *Für $w \in W$ gilt*

$$\#\{h \in \Sigma : w(h, \epsilon) = (whw^{-1}, -\epsilon)\} \leqq l(w).$$

Beweis : Wir schreiben $w = s_q \ldots s_1$ mit $s_i \in S$ und $q = l(w)$. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 2.9. □

Korollar 2.11 *Es sei $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_q \in W$ mit $q = l(w)$.. Dann sind die Elemente $h_1, \ldots, h_q$ aus Lemma 2.9 paarweise verschieden und es gilt*

$$\{h \in \Sigma : w^{-1}(h, \epsilon) = (w^{-1}hw, -\epsilon)\} = \{h_1, \ldots, h_q\}.$$

Beweis : Es ist definitionsgemäß

$$\begin{aligned} h_1 &= s_1 \\ h_2 &= s_1 s_2 s_1 \\ h_3 &= (s_1 s_2) s_3 (s_2 s_1) \\ &\vdots \\ h_q &= (s_1 \cdot \ldots \cdot s_{q-1}) s_q (s_{q-1} \cdot \ldots \cdot s_1). \end{aligned}$$

Angenommen, zwei dieser Elemente stimmen überein, d.h. es gilt für $1 \leqq \nu < \mu \leqq q$

$$h_\nu = h_\mu.$$

Aus $(s_1 \cdot \ldots \cdot s_\nu) s_{\nu+1} (s_\nu \cdot \ldots \cdot s_1) = (s_1 \ldots s_\nu s_{\nu+1} \ldots s_{\mu-1}) s_\mu (s_{\mu-1} \ldots s_{\nu+1} s_\nu \ldots s_1)$ folgt dann

$$s_{\nu+1} = s_{\nu+1} \cdot \ldots \cdot s_{\mu-1} s_\mu s_{\mu-1} \ldots s_{\nu+1},$$

also $1 = s_{\nu+1} s_{\nu+2} \cdot \ldots \cdot s_{\mu-1} s_\mu s_{\mu-1} \ldots s_\nu$ und somit

$$s_\nu \cdot \ldots \cdot s_\mu = s_{\nu+1} \cdot \ldots \cdot s_{\mu-1}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} w &= s_1 \cdot \ldots \cdot s_q \\ &= (s_1 \ldots s_{\nu-1})(s_{\nu+1} \ldots s_{\mu-1}) s_{\mu+1} \ldots s_q, \end{aligned}$$

was $l(w) = q$ widerspricht!

Also sind $h_1, \ldots, h_q$ paarweise verschieden, falls $l(w) = q$ ist.

Wir betrachten nun die Folge von Elementen

$$x_k = s_k \cdot \ldots \cdot s_1(h, \epsilon)$$

in $\mathcal{H} = \Sigma \times \{\pm 1\}$. Wir schreiben $x_k = (y_k, \epsilon_k)$ für $y_k \in \Sigma$ und $\epsilon_k \in \{\pm 1\}$. Im Beweis von Lemma 2.9 haben wir gesehen, dass aus $\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_{k-1} = \epsilon$ und $\epsilon_k = -\epsilon$

$$h = h_k$$

folgt. Da die $h_1, \ldots, h_q$ paarweise verschieden sind, gibt es also zwei Möglichkeiten für ein $g \in \Sigma$. Entweder $g \notin \{h_1, \ldots, h_q\}$, dann findet in der Folge $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_q$ nie ein Vorzeichenwechsel statt und

$$g \notin \{h \in \Sigma : w^{-1}(h, \epsilon) = (w^{-1}hw, -\epsilon)\}.$$

Oder aber $g = h_k$ für genau ein $k \in \{1, \ldots, q\}$. Dann findet ein Vorzeichenwechsel statt und

$$g \in \{h \in \Sigma : w^{-1}(h, \epsilon) = (w^{-1}hw, -\epsilon)\}.$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 2.12 *Es sei* $w = s_1 \dots s_q$ *mit* $q > l(w)$. *Dann gibt es* $1 \leqq \nu < \mu \leqq q$ *mit*

$$h_\nu = h_\mu.$$

Beweis : Sei $h \in \mathcal{H}$. Wir betrachten wieder die Elemente

$$x_k = s_k \cdot \ldots \cdot s_1(h, \epsilon) = (y_k, \epsilon_k).$$

Nach Definition der $S-$Operation auf $\mathcal{H}$ ist $y_k = s_k \cdot \ldots \cdot s_1 h s_1 \dots s_k$. Außerdem ist $w^{-1}(h, \epsilon) = x_q$. Aus Korollar 2.10 folgt

$$\#\{h \in \Sigma : w^{-1}(h, \epsilon) = (w^{-1}hw, -\epsilon)\} \leqq l(w^{-1}) = l(w) < q.$$

Falls $\{h \in \Sigma : w^{-1}(h, \epsilon) = (w^{-1}hw, -\epsilon)\} = \{h_1, \dots, h_q\}$ ist, müssen zwei Elemente der Menge auf der rechten Seite gleich sein und es folgt die Behauptung. Ansonsten existiert ein h_μ mit $w^{-1}(h_\mu, \epsilon) = (w^{-1}h_\mu w, \epsilon)$. Nun gilt

$$y_{\mu-1} = s_{\mu-1} \cdot \ldots \cdot s_1 h_\mu s_1 \dots s_{\mu-1} = s_\mu,$$

also folgt

$$y_\mu = s_\mu(y_{\mu-1}, \epsilon_\mu) = (s_\mu y_{\mu-1} s_\mu, -\epsilon_\mu).$$

Damit $w^{-1}(h_\mu, \epsilon)$ wieder dasselbe Vorzeichen im zweiten Argument hat wie (h_μ, ϵ), muss also ein zweiter Vorzeichenwechsel in der Folge der ϵ_k stattfinden. Also existiert ein $\nu \neq \mu$ mit $s_\nu = y_{\nu-1} = s_{\nu-1} \dots s_1 h_\mu s_1 \dots s_{\nu-1}$, woraus $h_\mu = h_\nu$ folgt. □

Wir betrachten jetzt eine endliche Gruppe G zusammen mit einem Erzeugendensystem S, das folgenden Bedingungen genügt:

i) $1 \notin S$

ii) jedes $s \in S$ erfüllt $s^2 = 1$.

In einer solchen Gruppe G kann man genau wie in Definition 2.7 eine Länge von Elementen als

$$l(w) = \min\{k \geqq 1 : w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_k \text{ für } s_1, \dots, s_k \in S\}$$

definieren.

Wir wollen nun Bedingungen finden, unter denen G eine Coxetergruppe ist, d.h. die Eigenschaft (C) aus Definition 2.3 besitzt.

Definition 2.13 *Sei* G *eine endliche Gruppe mit einem Erzeugendensystem* S, *das i) und ii) erfüllt.*

i) Wir sagen, G erfüllt die Löschbedingung („Deletion condition“), falls folgendes gilt:

(D) Ist $s_1, \ldots, s_q \in S$ und $w = s_i \cdot \ldots \cdot s_q$ mit $l(w) < q$, dann existieren Indizes $\nu < \mu$ in $\{1, \ldots, q\}$, so dass

$$w = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu, \mu}}^{n} s_i$$

gilt. Wir können also in der Produktdarstellung von w die beiden Faktoren s_ν und s_μ einfach weglassen.

ii) Wir sagen, G erfüllt die Austauschbedingung („Exchange condition“), falls folgendes gilt:

(E) Ist $s_1, \ldots, s_q \in S$ und $w = s_i \cdot \ldots \cdot s_q$ mit $l(w) = q$, so gilt für jedes $s \in S$ entweder $l(sw) = l(w) + 1$ oder es gibt ein $\mu \leqq q$ mit

$$w = s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \mu}}^{q} s_i.$$

Lemma 2.14 *Erfüllt (G,S) die Bedingung (D), so erfüllt (G,S) auch die Bedingung (E).*

Beweis : Es sei $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_q$ mit $l(w) = q$. Wir betrachten $s_0 w$ für ein Element $s_0 \in S$. Falls $l(s_0 w) = l(s_0 s_1 \ldots s_q) \neq l(w) + 1$ gilt, so folgt aus der Löschbedingung (D), dass es Indizes $\nu < \mu$ in $\{s_0, \ldots, s_q\}$ gibt, so dass $s_0 w = \prod_{i \neq \nu, \mu} s_i$ gilt. Falls $\nu \geqq 1$ ist, so folgt

$$s_0 w = s_0 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu, \mu}}^{n} s_i,$$

also $w = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu, \mu}}^{n} s_i$. Das ist ein Widerspruch zu $l(w) = q$. Also muss $\nu = 0$ sein, woraus $s_0 w = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \mu}}^{n} s_i$ folgt. Nach Multiplikation mit s_0 ergibt sich

$$w = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \mu}}^{n} s_i.$$

□

Satz 2.15 *Eine Coxetergruppe (W,S) erfüllt die Löschbedingung (D), nach Lemma 2.14 also auch die Austauschbedingung (E).*

Beweis : Es sei $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_q \in W$ ein Element mit $l(w) < q$. Wir müssen zeigen, dass wir in dieser Produktdarstellung von w zwei Faktoren löschen können. Wir definieren die Elemente

$$\begin{aligned} h_1 &= s_1 \\ h_2 &= s_1 s_2 s_1 \\ &\vdots \\ h_q &= s_1 \ldots s_{q-1} s_q s_{q-1} \ldots s_1 \end{aligned}$$

wie in Lemma 2.9. Nach Korollar 2.12 gibt es Indizes $\nu < \mu$ mit

$$h_\nu = h_\mu.$$

Also gilt

$$(s_1 \ldots s_{\nu-1}) s_\nu (s_{\nu-1} \ldots s_1) = (s_1 \ldots s_{\nu-1})(s_\nu \ldots s_{\mu-1}) s_\mu (s_{\mu-1} \ldots s_{\nu+1})(s_\nu \ldots s_1)$$

woraus

$$1 = s_\nu \cdot \ldots \cdot s_{\mu-1} s_\mu s_{\mu-1} \cdot \ldots \cdot s_{\nu+1}$$

folgt. Daraus ergibt sich

$$s_{\nu+1} \cdot \ldots \cdot s_{\mu-1} = s_\nu \cdot \ldots \cdot s_\mu,$$

woraus

$$w = s_1 \ldots s_q = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu, \mu}}^{n} s_i$$

folgt. □

Wir betrachten wieder eine Gruppe G zusammen mit einem endlichen Erzeugendensystem S, das aus Elementen der Ordnung zwei besteht.

Definition 2.16 *Wir nennen eine Darstellung $w = s_1 \ldots s_q$ von $w \in G$ als Produkt von Elementen aus S* ***reduziert****, falls $q = l(w)$ gilt. Wir betrachten nun Worte $(s_1, \ldots, s_q)$ in der freien Gruppe F_S. Mit M bezeichnen wir die Matrix*

$$\big(ord(s \cdot t)\big)_{s,t \in S}.$$

Definition 2.17 *Es sei $(s_1, \ldots, s_q) \in F_S$. Eine elementare $M-$Operation auf $(s_1, \ldots, s_q)$ ist eine der folgenden Änderungen dieses Wortes:*

(I) Streichen eines Ausdrucks der Form (s, s) aus w.

(II) Ersetzen eines alternierenden Teilworts der Form $(s, t, s, t, \ldots)$ der Länge $m(s, t)$ durch das Teilwort $(t, s, t, s, \ldots)$ der Länge $m(s, t)$.

Wir nennen ein Wort $w \in F_S$ $M-$reduziert, falls es nicht durch eine elementare $M-$Operstion vom Typ (I) oder (II) in ein kürzeres Wort verwandelt werden kann.

Satz 2.18 *Angenommen, (G, S) erfüllt die Austauschbedingung (E). Dann gilt*

i) Das Element $w = s_1 \dots s_q \in G$ ist reduziert genau dann, wenn das Wort $(s_1, \dots, s_q)$ $M-$reduziert ist.

ii) Falls $w = s_1 \dots s_q = t_1 \dots t_q$ zwei reduzierte Darstellungen von $w \in G$ sind, dann lässt sich das Wort $(s_1, \dots, s_q)$ durch Anwenden elementarer $M-$Operationen vom Typ (II) in das Wort $(t_1, \dots, t_q)$ überführen.

Beweis : Wir zeigen zunächst (ii). Angenommen, in G gilt

$$w = s_1 \dots s_q = t_1 \dots t_q$$

mit $l(w) = q$.

Wir zeigen mit Induktion nach q, dass sich $(s_1, \dots, s_q)$ durch Operationen vom Typ (II) in $(t_1, \dots, t_q)$ überführen lässt. Für $q = 1$ ist nichts zu zeigen. Also nehmen wir $q > 1$ an. Falls dann $s_1 = t_1$ ist, so gilt

$$s_2 \dots s_q = t_2 \dots t_q$$

in G, und die Behauptung folgt aus der Induktionsvoraussetzung. Wir können also $s_1 \neq t_1$ annehmen. Nun wenden wir die Austauschbedingung (E) an. Aus $t_1 s_1 s_2 \dots s_q = t_2 \dots t_q$ folgt $l(t_1 w) < l(w) + 1$, also ist $w = t_1 \prod_{i \neq \mu} s_i$. Hier ist das gestrichene Element s_μ nicht s_1, denn sonst würde aus $s_1 q = t_1 s_2 \dots s_q$ die Gleichheit $s_1 = t_1$ folgen. Also hat w eine reduzierte Darstellung, die mit $t_1 s_1$ beginnt. Ist $m = m(s_1, t_1) = 2$, so ist $t_1 s_1 = s_1 t_1$.

Ist $m = m(s_1, t_1) > 2$, so wenden wir wieder die Austauschbedingung auf s_1 und $t_1 s_1 \prod_{\substack{i \geqq 2 \\ i \neq \mu}} s_i$ an und erhalten

$$w = t_1 s_1 \prod_{\substack{i \geqq 2 \\ i \neq \mu}} s_i = s_1 t_1 s_1 \prod_{\substack{i \geqq 2 \\ i \neq \mu, \nu}} s_i.$$

Auch hier kann das gestrichene Element weder t_1 noch s_1 sein. Wir fahren so lange fort, bis wir eine reduzierte Darstellung von w der Form

$$w = \begin{cases} \underbrace{s_1 t_1 \dots t_1}_{m} \prod_{i \in I \subset \{2, \dots, n\}} s_i & m \text{ gerade} \\ \underbrace{s_1 t_1 \dots s_1}_{m} \prod_{i \in I \subset \{2, \dots, n\}} s_i & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

erhalten. Nun geht $(s_1, \dots, s_q)$ durch Operationen vom Typ (II) in $(\underbrace{s_1, \dots, t_1/s_1}_{m}, s_i)$ über, da die Anfangselemente gleich sind. Dieses Wort lässt sich mit einer Operation vom Typ (II) in das Wort

$$(\underbrace{t_1, s_1, \dots, s_1/t_1}_{m}, s_i)$$

verwandeln. Letzteres lässt sich wegen Gleichheit der Anfangselemente in $(t_1, \dots, t_q)$ überführen. Damit haben wir ii) gezeigt.

i) Offenbar ist für jede reduzierte Darstellung $w = s_1 \dots s_q$ das Wort $(s_1, \dots, s_q)$ $M-$reduziert. Wir nehmen umgekehrt an, dass $w = s_1 \dots s_q$ keine reduzierte Darstellung ist, d.h. dass

$$l(w) < q$$

gilt und zeigen mit Induktion nach q, dass $(s_1, \dots, s_q)$ $M-$reduziert ist. Für $q = 1$ ist nichts zu zeigen. Also sei $q > 1$. Falls $s_1 \cdot \dots \cdot s_q$ ebenfalls nicht reduziert ist, so folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung. Also nehmen wir an, $w' = s_2 \cdot \dots \cdot s_q$ ist reduziert. Da $l(s_1 w') = l(w) < q = l(w') + 1$ ist, gibt es nach der Austauschbedingung (E) eine Darstellung

$$w' = s_1 t_2 \cdot \dots \cdot t_{q-2} \text{ für } t_2, \dots, t_{q-2} \in \{s_2, \dots, s_q\}.$$

Nach Teil ii) können wir das Wort $(s_2, \dots, s_q)$ durch elementare $M-$Operationen vom Typ (II) in das Wort

$$(s_1, t_2, \dots, t_{q-2})$$

überführen. Also können wir $(s_1, \dots, s_q)$ durch elementare $M-$Operationen in $(s_1, s_1, t_2, \dots, t_{q-2})$ und damit auch in $(t_2, \dots, t_{q-2})$ überführen. Daher ist $(s_1, \dots, s_q)$ nicht $M-$reduziert.

□

Satz 2.19 *Falls (G, S) die Behauptung (E) erfüllt, dann ist (G, S) eine Coxetergruppe, d.h. sie erfüllt die Bedingung (C).*

Beweis : Wir betrachten den kanonischen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : F_S \to G$$

$$(s_1, \dots, s_q) \mapsto s_i \cdot \dots \cdot s_q.$$

Wir müssen zeigen, dass Kern φ der kleinste Normalteiler ist, der alle Elemente der Form $(st)^{\mathrm{ord}(s \cdot t)}$ enthält. Sei N ein Normalteiler, der alle diese Elemente enthält, mit $N \subset$ Kern φ.

Angenommen, $(s_1, \dots, s_q) \in F_S$ liegt im Kern von φ, d.h. es gilt $s_1 \cdot \dots \cdot s_q = 1$ in G. Das Element $s_1 \cdot \dots \cdot s_q$ ist also nicht reduziert, also ist nach Satz 2.18 das Wort $(s_1, \dots, s_q)$ auch nicht $M-$reduziert. Es lässt sich also durch elementare $M-$Operationen auf ein Wort $(t_1, \dots, t_p)$ mit $p < q$ verkürzen. Nach Definition der elementaren $M-$Operationen gilt in G

$$t_1 \cdot \dots \cdot t_p = s_1 \cdot \dots \cdot s_q = 1.$$

Das folgt für Operationen vom Typ (I) aus $\mathrm{ord}(s) = 2$ für alle $s \in S$ und für Operationen vom Typ (II) aus $(st)^{m(s,t)} = 1$, denn das impliziert

$$\underbrace{st \dots \left\{ \begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \right\}}_{m(s,t)} = \underbrace{ts \dots \left\{ \begin{smallmatrix} t \\ s \end{smallmatrix} \right\}}_{m(s,t)}.$$

Nun gilt aber aus demselben Grund auch in F_S/N

$$s^2 = 1 \text{ für } s \in S$$

und $(st)^{m(s,t)} = 1$ für $s, t \in S$. Also folgt auch in F_S/N

$$t_1 \cdot \ldots \cdot t_p = s_i \cdot \ldots \cdot s_q.$$

Mit Induktion nach q können wir so zeigen, dass

$$s_1 \cdot \ldots \cdot s_q = 1 \text{ in } F_S/N$$

gilt. Also folgt $s_1 \cdot \ldots \cdot s_q \in N$. Daher gilt $N =$ Kern φ und somit die Bedingung (C). $\square$

Korollar 2.20 *Für eine Gruppe (G, S) wie oben sind die Bedingungen $(C), (D)$ und (E) äquivalent.*

3 Coxeterkomplexe

Es sei (W, S) eine Coxetergruppe.

Definition 3.1 *Für jede Teilmenge $T \subset S$ sei $W_T = \langle T \rangle = \{t_1 \cdot \ldots \cdot t_r : t \in T, r \geqq 0\}$ die von T erzeugte Untergruppe von W.*

Lemma 3.2 *Für alle $T \subset S$ ist auch (W_T, T) eine Coxetergruppe.*

Beweis : Aus der Bedingung (D) in (W, S) folgt sofort die Bedingung (D) in (W_T, T). $\square$

Korollar 3.3 *Für $T_1, T_2 \subset S$ ist*

$$W_{T_1} \cap W_{T_2} = W_{T_1 \cap T_2}.$$

Außerdem gilt

$$W_{T_1} = W_{T_2} \Leftrightarrow T_1 = T_2$$

und

$$W_{T_1} \subset W_{T_2} \Leftrightarrow T_1 \subset T_2.$$

Ferner ist $W_{T_1} \cap S = T_1$.

Beweis : Wir zeigen zunächst $W_{T_1} \cap S = T_1$. Hier ist nur „ $\subset$ “ zu zeigen. Also sei $s \in S$ ein Element mit einer Darstellung

$$s = t_1 \cdot \ldots \cdot t_r$$

für $t_1, \ldots, t_r \in T_1$. Wir zeigen $s \in T_1$ mit Induktion nach r. Für $r = 1$ ist $s = t_1 \in T_1$. Für $r > 1$ ist $l(s) = 1 < r$, also folgt aus der Bedingung (D)

$$s = \prod_{i \neq \mu, \nu} t_i.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist also $s \in T_1$.

Nun zeigen wir $W_{T_1} \subset W_{T_2} \Leftrightarrow T_1 \subset T_2$. Die Richtung „ $\Leftarrow$ “ ist klar. Die andere Richtung folgt aus

$$T_1 = W_{T_1} \cap S \subset W_{T_2} \cap S = T_2.$$

Daher gilt auch

$$W_{T_1} = W_{T_2} \Leftrightarrow T_1 = T_2.$$

Es bleibt $W_{T_1} \cap W_{T_2} = W_{T_1 \cap T_2}$ zu zeigen. Die Inklusion „ $\supset$ “ folgt aus $T_1 \cap T_2 \subset T_1$ und $T_1 \cap T_2 \subset T_2$. Die Inklusion „ $\subset$ “ zeigen wir folgendermaßen. Angenommen $w \in W_{T_1} \cap W_{T_2}$. Die Länge von w in W_{T_1} bzw. W_{T_2} ist dieselbe wie die Länge von w in W (Übungsaufgabe). Also gilt

$$w = t'_1 \cdot \ldots \cdot t'_q = t''_1 \cdot \ldots \cdot t''_q$$

mit $t'_i \in T_1,\ t''_I \in T_2$ und $q = l(w)$. Wir zeigen $w \in W_{T_1 \cap T_2}$ mit Induktion nach q. Für $q = 1$ ist $w = t_1 = t''_1 \in T_1 \cap T_2$. Also sei $q > 1$. Dann ist

$$l(t''_1 w) = l(t''_2 \ldots t''_q) < q + 1,$$

also folgt aus der Bedingung (E)

$$w = t''_1 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \mu}}^{q} t'_i.$$

Daher gilt $\prod_{i \neq \mu} t'_i = t''_2 \cdot \ldots \cdot t''_q$ und die Behauptung folgt aus der Induktionsvoraussetzung. $\square$

Definition 3.4 *Wir nennen jede Nebenklasse*

$$\sigma(w, T) = wW_T$$

bezüglich einer der Untergruppen W_T für $T \subset S$ eine spezielle Nebenklasse. Die Menge aller speziellen Nebenklassen bezeichnen wir mit

$$\Sigma(W, S).$$

Wir definieren eine partielle Ordnung auf $\Sigma(W, S)$ durch

$$\begin{aligned} w_1 W_{T_1} &\leqq w_2 W_{T_2} \\ \Leftrightarrow w_2 W_{T_2} &\subset w_1 W_{T_1}. \end{aligned}$$

(Achtung: die Reihenfolge dreht sich hier um!)

Es gilt also $w_1W_{T_1} \leqq w_2W_{T_2}$ genau dann, wenn $w_2W_{T_2} \subset w_1W_{T_1}$ ist. Das ist äquivalent zu $W_{T_2} \subset w_2^{-1}w_1W_{T_1}$. Da diese Nebenklasse das Einselement enthält, folgt

$$w_2^{-1}w_1 \in W_{T_1}.$$

Daher gilt nach Korollar 3.3 $w_1W_{T_1} \leqq w_2W_{T_2}$ genau dann, wenn $w_2^{-1}w_1 \in W_{T_1}$ und $T_2 \subset T_1$ ist. Insbesondere ist W selbst eine spezielle Nebenklasse mit

$$W \leqq \sigma(w,T)$$

für jede andere spezielle Nebenklasse $\sigma(w,T)$.

Da wir $W_\emptyset = \{1\}$ zulassen, bilden ferner alle Elemente w aus W spezielle Nebenklassen $\{w\} = \sigma(w,\phi)$. Außerdem ist für jedes $s \in S$ und $w \in W$ die Menge $\sigma(w, S\backslash\{s\}) = wW_{S\backslash\{s\}}$ eine spezielle Nebenklasse. Ist $\sigma(u',T)$ ein Element mit

$$\sigma(u,T) \leqq \sigma(w, S\backslash\{s\}),$$

so folgt aus $w^{-1}u \in W_T$ und $S\backslash\{s\} \subset T$, dass entweder $T = S$ und damit $\sigma(u,T) = W$ oder $S\backslash\{s\} = T$ und damit $uW_T = wW_{S\backslash\{s\}}$, d.h. $\sigma(u,T) = \sigma(w,S\backslash\{s\})$ gilt.

Das einzige Element in $\Sigma(W,S)$, das echt kleiner als $\sigma(w,S\backslash\{s\})$ ist, ist also das minimale Element W. Wir nennen jede spezielle Nebenklasse der Form $\sigma(w,S\backslash\{s\})$ eine **Ecke** von $\Sigma(W,S)$. Mit M bezeichnen wir die Menge aller Ecken $\Sigma(W,S)$.

Satz 3.5 *Die partiell geordnete Menge* $\big(\Sigma(W,S), \leqq\big)$ *ist ein Simplizialkomplex. Genauer gesagt: Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \Sigma(W,S) & \to & \mathcal{P}(M) \\ \sigma(w,T) & \mapsto & \{a \in M : a \leqq \sigma(w,T)\} \end{array}$$

ist eine Bijektion von $\Sigma(W,S)$ *auf einen Simplizialkomplex im Sinne von Definition 1.3.*

Beweis : Es sei $\triangle$ die Menge aller Teilmengen von M der Form

$$X = \{a \in M : a \leqq \sigma(w,T)\}$$

für eine spezielle Nebenklasse $\sigma(w,T)$. Angenommen, Y ist eine Teilmenge von X. Wir müssen zeigen, dass dann auch Y von einer speziellen Nebenklasse herkommt. Es sei

$$\sigma(w_1, S\backslash\{s_1\}), \ldots, \sigma(w_r, S\backslash\{s_r\})$$

eine Aufzählung der Ecken in Y. Dann folgt aus

$$\sigma(w_i, S\backslash\{s_i\}) \leqq \sigma(w,T),$$

dass $T \subset S\backslash\{s_i\}$ und $w^{-1}w_i \in W_S\backslash\{s_i\}$ gilt. Für $S' = \bigcap\limits_{i=1}^{r} S\backslash\{s_i\} = S\backslash\{s_1 \ldots s_r\}$ gilt nach Korollar 3.3

$$W_{S'} = \bigcap_{i=1}^{r} W_{S\backslash\{s_i\}}.$$

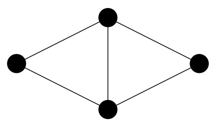
Also ist
$$\sigma(w_i, S\backslash\{s_i\}) \leqq \sigma(w, W_{S'}).$$
Ist $\sigma(u, S\backslash\{t\})$ eine beliebige Ecke von X mit
$$\sigma(u, S\backslash\{t\}) \leqq \sigma(w, W_{S'}),$$
so folgt
$$S' \subset S\backslash\{t\} \text{ und } w^{-1}u \in W_{S\backslash\{t\}}.$$
Also ist $t = s_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, r\}$. Aus $w^{-1}u$ und $w^{-1}w_i \in W_{S\backslash\{s_i\}}$ folgt $u^{-1}w_i \in W_{S\backslash\{s_i\}}$, also
$$uW_{S\backslash\{t\}} = w_i W_{S\backslash\{s_i\}}.$$
Wir haben also gezeigt, dass
$$Y = \{a \in M : a \leqq \sigma(w, W_{S'}\} \text{ ist.}$$
Ein ähnliches Argument zeigt, dass die Abbildung von $\Sigma(W, S)$ nach $\triangle$ injektiv ist. $\square$

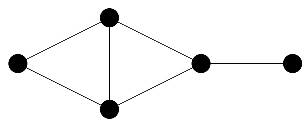
Ist $\triangle$ ein Simplizialkomplex im Sinne von Definition 1.3, so bezeichnen wir die Elemente von $\triangle$ als Simplizes. Für jedes $\sigma \in \triangle$ heißt $\mid \sigma \mid -1$ die Dimension von σ. Wie im Beweis von Satz 3.5 zeigt man, dass die Dimension von $\sigma(w, W_T)$ gleich $\mid S\backslash T \mid -1$ ist.

Definition 3.6 *Sei $\triangle$ ein Simplizialkomplex im Sinne von Definition 1.3.*

*i) $\triangle$ heißt **rein**, wenn jedes $\sigma \in \triangle$ in einem (bezüglich Inklusion) maximalen Simplex enthalten ist und wenn alle maximalen Simplizes dieselbe Dimension haben.*

Beispiel:





Die maximalen Simplizes heißen dann Kammern.

ii) Sei $\triangle$ ein reiner Simplizialkomplex. Der Kammerngraph zu $\triangle$ ist definiert als der Graph, dessen Ecken den Kammern von $\triangle$ entsprechen, wobei zwei Ecken δ, τ genau dann durch eine Kante verbunden werden, wenn
$$\dim(\sigma \cap \tau) = \dim(\sigma) - 1$$
gilt.

*$\triangle$ heißt **Kammerkomplex**, wenn dieser Kammergraph zusammenhängend ist. Wege in Kammergraphen nennt man dann **Galerien**.*

Lemma 3.7 *Es sei (W, S) ein Coxetersystem. Dann ist der Coxetergraph $\Sigma(W, S)$ ein Kammerkomplex.*

Beweis : $\Sigma(W,S)$ ist rein, da die maximalen speziellen Nebenklassen genau die Nebenklassen der Form $\{w\} = \sigma(w,\emptyset)$ sind. Diese sind alle $\mid S \mid -1$ dimensional (Übungsaufgabe). Nun sind die Simplizes der Dimension $\mid S \mid -2$ gerade diejenigen speziellen Nebenklassen $\sigma(w,T)$, die in genau $\mid S \mid -1$ vielen Ecken $\sigma(w_i, S\backslash\{s_i\})$ vorkommen. Daraus folgt

$$T = \{t\} \text{ für ein } t \in T,$$

also $W_T = \{1,t\}$ und somit

$$\sigma(w,T) = \{w, wt\}.$$

Die Kammern $\{w\}$ und $\{v\}$ schneiden sich also genau dann in einem Simplex der Dimension $\mid S \mid -2$, wenn

$$v = wt \text{ für ein } t \in S$$

gilt. Somit sind die Galerien in $\Sigma(W,S)$ genau die Folgen

$$w, ws_1, ws_1s_2, \ldots, ws_1s_2\ldots s_k$$

für $s_1, \ldots, s_k \in S$. Da S ein Erzeugendensystem von W ist, ist der Kammergraph zusammenhängend, als $\Sigma(W,S)$ in der Tat ein Kammerkomplex. $\square$

Definition 3.8 *Wir statten den Coxeterkomplex $\Sigma(W,S)$ auf folgende Weise mit einer **Typfunktion** τ aus:*

$$\begin{aligned} \tau : \Sigma(W,S) &\to \mathcal{P}(S) \\ wW_T &\mapsto S\backslash T. \end{aligned}$$

Die Typfunktion ist ordnungserhaltend, wenn wir die Potenzmenge $\mathcal{P}(S)$ mit der Inklusion als partieller Ordnung versehen.

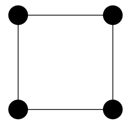
Die Coxetergruppe W operiert auf natürliche Weise auf dem Coxeterkomplex $\Sigma(W,S)$, indem wir

$$w\big(\sigma(w',T)\big) = \sigma(ww',T),$$

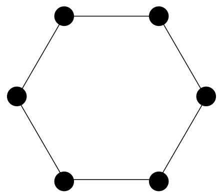
also $w(w'W_T) = (ww')W_T$ setzen. Diese Operation erhält die Dimension und den Typ eines Simplex.

Beispiel: Es sei $W = D_{2m}$ die Diedergruppe mit Erzeugern $S = \{s,t\}$ der Ordnung zwei, so dass die Ordnung von st gleich m ist. Dann enthält $\Sigma(W,S)$ das minimale Element $\sigma(1,S) = W$ der Dimension -1. Ferner enthält $\Sigma(W,S)$ $2m$ Simplizes der Dimension 0. Sie sind von der Form $\sigma(w,\{s\}) = \{w, ws\}$ beziehungsweise $\sigma(w,\{t\}) = \{w, wt\}$. Schließlich gibt es noch $2m$ Simplizes der Dimension 1, nämlich $\sigma(w,\emptyset) = \{w\}$ für alle $w \in D_{2m}$. Diese Simplizes sind die Kammern. Zwei Kammern $\{w\}$ und $\{v\}$ haben genau dann eine Ecke gemeinsam, wenn $w = vs$ oder $w = vt$ gilt. Also ist $\Sigma(W,S)$ ein Graph mit $2m$ Ecken und $2m$ Kanten, bei dem jede Kante zwei Kantennachbarn hat. Daher ist $\Sigma(W,S)$ als Graph ein $2m-$Eck:

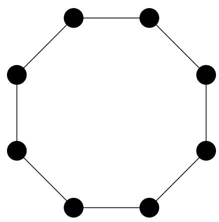
D_4



D_6



D_8



Wir wollen nun zeigen, dass wir die Coxetergruppe W aus dem Coxeterkomplex zurückgewinnen können. Dazu brauchen wir einige Begriffe.

Definition 3.9 *Es seien Σ_1 und Σ_2 Simplizialkomplexe. Eine Abbildung*

$$\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$$

heißt ***reguläre simpliziale Abbildung****, falls sie ordnungserhaltend* $\big($*das heißt* $a \subset b \Rightarrow \varphi(a) \subset \varphi(b)\big)$ *und dimensionserhaltend* $\big($ *das heißt* $\dim(a) = \dim \varphi(b)\big)$ *ist.*

Beispiel: Die Typfunktion

$$\begin{array}{rcl} t : \Sigma(W,S) & \to & \mathcal{P}(S) \\ wW_T & \mapsto & S \backslash T \end{array}$$

ist eine reguläre simpliziale Abbildung, wenn wir $\mathcal{P}(S)$ mit der Inklusion als Simplizialkomplex im Sinne von Definition 1.3 verstehen.

Definition 3.10 *Eine Abbildung $\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ ist ein Isomorphismus von Simplizialkomplexen, falls φ bijektiv und falls φ und φ^{-1} ordnungserhaltend sind.*

Ein Isomorphismus von Simplizialkomplexen ist dimensionserhaltend, also eine reguläre simpliziale Abbildung.

Definition 3.11 *Es sei Σ ein Simplizialkomplex und $a \in \Sigma$. Dann definieren wir den Link von a als*

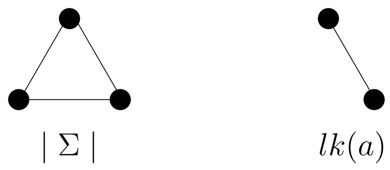
$$lk(a) = lk_\Sigma(a) = \{b \in \Sigma : a \cap b = \emptyset, a \cup b \in \Sigma\}.$$

Der Link von a ist also als partiell geordnete Menge isomorph zu $\Sigma_{\geqq a} := \{c \in \Sigma : c \supset a\}$, denn

$$\begin{array}{rcl} lk(a) & \to & \Sigma_{\geqq a} \\ b & \mapsto & a \cup b \end{array}$$

ist eine ordnungserhaltende Bijektion.

Beispiel: Für $\Sigma = \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$ und $a = \{1\}$ ist $lk(a) = \mathcal{P}(\{2, \ldots, n\})$. Die geometrische Realisierung von Σ ist ein $(n-1)-$dimensionaler Simplex. Für $n = 3$ erhalten wir also als Beispiel



Proposition 3.12 *Es sei (W, S) ein Coxetersystem mit Coxetergraph $\Sigma(W, S)$. Für ein Simplex $a \in \Sigma(W, S)$ sei $S' = S \backslash t(a)$ und $W' = W_{S'} \overset{3.1}{=} \langle S' \rangle$.*

Dann ist $lk_\Sigma(a)$ als partiell geordnete Menge isomorph zum Coxeterkomplex $\Sigma(W', S')$.

Beweis : Nach Lemma 3.2 ist zunächst (W', S') auch ein Coxetersystem. Das Simplex a in $\Sigma(W, S)$ ist von der Form $w_0 W_{T_0}$ für ein $w_0 \in W$ und $T_0 \subset S$. Also ist

$$\begin{array}{rcl} S' & = & S \backslash t(a) \\ & = & S \backslash (S \backslash T_0) \\ & = & T_0. \end{array}$$

Wir haben oben gesehen, dass $lk_\Sigma(a)$ als partiell geordnete Menge isomorph zu $\Sigma_{\geqq a} = \{wW_T : wW_T \subset w_0 W_{T_0}\} = \{wW_T : T \subset T_0$ und $w^{-1} w_0 \in W_{T_0}\}$ ist.

Die Multiplikation mit w_0^{-1} liefert also einen Isomorphismus partiell geordneter Mengen

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_{\geqq a} & \to & \Sigma(W_{T_0}, T_0) \\ wW_T & \mapsto & (w_0^{-1} w) W_{T_o}, \end{array}$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

Sind nun $s \neq t$ in S gegeben, wenden wir Proposition 3.12 auf die spezielle Nebenklasse $a = W_{\{s,t\}}$ in $\Sigma(W, S)$ an und erhalten einen Isomorphismus von

$$lk_{\Sigma(W,S)}(a) \text{ mit } \Sigma(W_{\{s,t\}}, \{s, t\}).$$

Nun ist $W_{\{s,t\}}$ eine Diedergruppe. Im obigen Beispiel haben wir gesehen, dass $\Sigma(W_{\{s,t\}}, \{s, t\})$ ein $2m-$Eck ist für $m = \mathrm{ord}(st)$.

Definition 3.13 *Wir definieren den Durchmesser diam(Σ) eines Kammerkomplexes Σ als den Durchmesser des zugehörigen Kammergraphen. Dabei ist der Durchmesser eines zusammenhängenden Graphen definiert als der maximale Abstand zwischen zwei Ecken.*

Beispiel: Der Durchmesser eines $2m-$Ecks ist gleich m.

Korollar 3.14 *Sei $\Sigma(W, S)$ ein Coxeterkomplex. Dann gilt für alle $s, t \in S$:*

$$ord\ (st) = diam\ lk(W_{\{s,t\}}).$$

Beweis : Nach Proposition 3.12 ist

$$\begin{aligned} \text{diam } lk_{\Sigma(W,S)}(W_{\{s,t\}}) &= \text{diam } \Sigma(W_{\{s,t\}}, \{s,t\}) \\ &= \text{ord } (st), \end{aligned}$$

denn $W_{\{s,t\}}$ ist eine Diedergruppe. $\square$

Dieses Korollar zeigt, dass man für alle $s, t \in S$ die Zahl ord(st) aus der Geometrie des Coxeterkomplexes $\Sigma(W, S)$ ablesen kann. Aufgrund der definierenden Eigenschaft (C) einer Coxetergruppe legt der Coxeterkomplex $\Sigma(W, S)$ also die Gruppenstruktur von W fest.

4 Gebäude

Definition 4.1 *Sei S eine endliche Menge. Ein Simplizialkomplex über S ist ein Simplizialkomplex Σ zusammen mit einer regulären simplizialen Abbildung*

$$t : \Sigma \to \mathcal{P}(S).$$

Man kann sich das so vorstellen: S ist eine Menge von Farben, und wir färben jede Ecke $\{v\}$ von Σ mit einer Farbe $\{t(v)\}$, so dass in jedem Simplex jede Farbe höchstens einmal auftritt.

Ein Homomorphismus von Simplizialkomplexen (Σ_1, t_1) und (Σ_2, t_2) über S ist eine reguläre simpliziale Abbildung $\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Sigma_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "t_1"'] & & \Sigma_2 \arrow[dl, "t_2"] \\ & \mathcal{P}(S) & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Beispiel: Für ein Coxetersystem (W, S) und ein Element $w_0 \in W$ ist

$$\begin{array}{rcl} \Sigma(W,S) & \to & \Sigma(W,S) \\ wW_T & \mapsto & w_0 w W_T \end{array}$$

ein Homomorphismus über der in Definition 3.8 definierten Typabbildung $t : \Sigma(W, S) \to \mathcal{P}(S)$.

Definition 4.2 ***(Gebäude)*** *Sei (W, S) wie immer eine endliche Coxetergruppe. Ein Gebäude vom Typ (W, S) ist ein Simplizialkomplex $\triangle$ über S zusammen mit einer Menge $\mathcal{A}$ von Unterkomplexen mit folgenden Eigenschaften:*

(B1) Für jedes $\Sigma \in \mathcal{A}$ gibt es einen Isomorphismus

$$\varphi : \Sigma(W, S) \xrightarrow{\sim} \Sigma$$

über S.

(B2) Sind Σ_1 und Σ_2 in $\mathcal{A}$ sowie $a, b \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, so gibt es einen Isomorphismus über S

$$\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$$

mit $\varphi(a) = a$ und $\varphi(b) = b$.

(B3) Für alle $a, b \in \triangle$ gibt es einen Unterkomplex $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $a, b \in \Sigma$.

Wir nennen jedes $\Sigma \in \mathcal{A}$ ein Apartment. $\mathcal{A}$ heißt auch ein Apartmentsystem von $\triangle$.

Lemma 4.3 *Jedes Gebäude $\triangle$ ist ein Kammerkomplex.*

Beweis : Je zwei Kammern von $\triangle$ liegen nach (B3) in einem gemeinsamen Apartment. Dies ist nach (B1) isomorph zu einem Coxeterkomplex, hat also einen zusammenhängenden Kammergraphen. Im Kammergraphen von $\triangle$ gibt es somit einen Weg zwischen den beiden Kammern. □

Beispiel: Jeder Coxeterkomplex $\Sigma(W, S)$ ist ein Gebäude mit dem Apartmentsystem $\{\Sigma(W, S)\}$.

Ist d die Dimension der Kammern in einem Gebäude $\triangle$, so liegt jedes Simplex der Dimension $d-1$ in mindestens zwei Kammern. Dazu betrachten wir ein Apartment, das dieses Simplex enthält. Da jedes Apartment isomorph zu $\Sigma(W, S)$ ist, entspricht dem Simplex der Dimension $d - 1$ eine spezielle Nebenklasse der Form

$$wW_{\{s\}} = \{w, ws\}$$

für ein $s \in S$ (vergleiche den Beweis von Lemma 3.7).

Diese liegt in den Kammern $\{w\}$ und $\{ws\}$.

Definition 4.4 *Ein Gebäude $\triangle$ mit Kammerdimension d heißt dick, falls jedes Simplex der Dimension $d-1$ in mindestens drei Kammern liegt. Ein Gebäude heißt dünn, wenn es nicht dick ist.*

Beispiel: Wir betrachten den Flaggenkomplex $\triangle(V)$ für $V = \mathbb{F}_2^3$ aus der Einführung. Es sei $W = \mathcal{S}_3$ und $S = \{\tau_{12}, \tau_{23}\}$, wobei τ_{12} und τ_{23} die entsprechenden Transpositionen sind.

Wir definieren den Typ einer Gerade in $\mathbb{F}_2^3$ als $\{\tau_{12}\}$ und den Typ einer Ebene in $\mathbb{F}_2^3$ als $\{\tau_{23}\}$. Volle Flaggen in $\mathbb{F}_2^3$ erhalten den Typ S. Damit haben wir eine Typfunktion

$$t : \triangle(V) \to \mathcal{P}(S)$$

definiert.

Nun sei $\mathcal{A} = \{\triangle(B) : B \text{ Basis von } \mathbb{F}_2^3\}$. Dann ist $\big(\triangle(\mathbb{F}_2^3), \mathcal{A}\big)$ ein Gebäude im Sinne von Definition 4.2. Es ist ein dickes Gebäude im Sinne von Definition 4.4.

Lemma 4.5 *Es sei (W,S) ein Coxetersystem. Ist $\varphi : \Sigma(W,S) \to \Sigma(W,S)$ ein typerhaltender Isomorphismus mit $\varphi(a) = a$ für ein $a \in \Sigma(W,S)$, so folgt $\varphi(b) = b$ für alle $b \in \Sigma(W,S)$ mit $b \leqq a$.*

Beweis : Es ist $a = wW_T$ für ein $w \in W$ und ein $T \subset S$, und $b = vW_{T_1}$ mit $T \subset T_1$ und $v^{-1}w \in W_{T_1}$. Da φ typerhaltend ist, folgt $\varphi(b) = v'W_{T_1}$ mit $v' \in W$. Aus $b \leqq a$ folgt ferner $\varphi(b) \leqq \varphi(a) = a$, also $v'^{-1}w \in W_{T_1}$. Daraus ergibt sich $v^{-1}v' \in W_{T_1}$, woraus $\varphi(b) = v'W_{T_1} = vW_{T_1} = b$ folgt. $\square$

Proposition 4.6 *Sei $\triangle$ ein Gebäude vom Typ (W,S) mit Apartmentsystem $\mathcal{A}$. Für jedes Simplex σ vom Typ $T \subsetneqq S$ ist dann der Link*

$$lk_\triangle(\sigma)$$

ein Gebäude vom Typ $(W_{S\setminus T}, S\setminus T)$ mit Apartmentsystem

$$\mathcal{A}_\sigma = \{lk_\Sigma(\sigma) : \Sigma \in \mathcal{A} \text{ mit } \sigma \in A\}$$

.

Beweis : Jedes Σ in $\mathcal{A}$ ist nach (B1) aus Definition 4.2 isomorph zu $\Sigma(W,S)$. Aus Proposition 3.12 folgt also

$$lk_\Sigma(\sigma) \simeq \Sigma(S_{S\setminus T}, S\setminus T).$$

Dieser Isomorphismus ist nach Konstruktion typerhaltend (ÜA), wobei wir als Typfunktion auf $lk_\triangle(\sigma)$ die Einschränkung der Typfunktion auf $\triangle$ nehmen. Somit gilt Bedingung (B1) für $lk_\triangle(\sigma)$.

Nun seien $a, b \in lk_{\Sigma_1}(\sigma) \cap lk_{\Sigma_2}(\sigma)$ gegeben. Dann ist $\sigma \cup a \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ und $\sigma \cup b \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Also gibt es nach Eigenschaft (B2) des Gebäudes $\triangle$ einen Isomorphismus über S

$$\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$$

mit $\varphi(\sigma \cup a) = \sigma \cup a$ und $\varphi(\sigma \cup b) = \sigma \cup b$.

Aus Lemma 4.5 folgt $\varphi(\sigma) = \sigma$ sowie $\varphi(a) = a$ und $\varphi(b) = b$. Daher vermittelt φ einen Isomorphismus

$$lk_{\Sigma_1}(\sigma) \to lk_{\Sigma_2}(\sigma),$$

der a und b festlässt.

Die Eigenschaft (B3) für $lk_{\triangle}(\sigma)$ folgt sofort aus der Eigenschaft (B3) für $\triangle$. □

Es sei $\triangle$ ein Gebäude vom Typ (W, S) mit Apartmentsystem $\mathcal{A}$. Wir wollen nun für jede Wahl eines Apartments $A \in \mathcal{A}$ und einer Kammer $c \in A$ eine Retraktionsabbildung

$$\rho = \rho_{A,c} : \triangle \to A$$

konstruieren.

Ist $\sigma \in \triangle$ ein beliebiges Simplex, so wählen wir nach (B3) ein Apartemnt $B \in \mathcal{A}$, das c und σ enthält. Nach (B2) existiert ein Isomorphismus

$$\varphi : B \to A$$

über S, der c festlässt. Wir definieren dann

$$\rho(\sigma) = \varphi(a).$$

Wir müssen uns natürlich überlegen, dass diese Abbildung wohldefiniert, das heißt unabhängig von allen getroffenen Wahlen ist.

Ist B' ein weiteres Apartment, das c und σ enthält, und $\varphi' : B' \to A$ ein weiterer Isomorphismus über S, der c festlässt, dann ist auch

$$\varphi^{-1} \circ \varphi' : B' \to B$$

ein Isomorphismus über S, der c festlässt. Nach (B2) gibt es einen Isomorphimus

$$\psi : B' \to B$$

über S, der c und σ festlässt. Wir betrachten $\psi' = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi' : B' \to B'$. Nach Lemma 4.5 lässt ψ' mit c auch alle Simplices $b \leqq c$ mit um eins verminderter Dimension fest. Da B' ein dünner Kammerkomplex ist, liegt b in genau zwei Kammern c und c'. Wird c von ψ' festgelassen, so wird also auch c' von ψ' festgelassen. Da B' ein Kammerkomplex ist, folgt $\psi' = id_{B'}$, also

$$\psi = \varphi^{-1} \circ \varphi'.$$

Somit lässt auch $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ das Simplex a fest, das heißt, es gilt $\varphi(a) = \varphi'(a)$. Daher ist ρ wohldefiniert.

Proposition 4.7 *$\rho = \rho_{A,C} : \triangle \to A$ ist ein regulärer simplizialer Homomorphimus über S mit*

$$\rho\mid_A = id_A$$

und $\rho^2 = \rho$.

Beweis : Das folgt aus der Konstruktion von ρ. □

5 Gruppen mit BN−Paar

Wir wollen jetzt zu gewissen Gruppen G ein Gebäude konstruieren, auf dem G als Automorphismengruppe operiert. Dazu brauchen wir zunächst Doppelnebenklassen.

Definition 5.1 *Sei G eine Gruppe mit Untergruppen H und K. Eine Teilmenge von G der Form*

$$HgK = \{hgk : h \in H, h \in K\}$$

heißt Doppelnebenklasse. Die Doppelnebenklassen entsprechen genau den Bahnen unter der folgenden Operation von H auf der Menge der Nebenklassen G/K von K in G:

$$\begin{array}{rcl} H \times G/K & \to & G/K \\ (h, gK) & \mapsto & hgK. \end{array}$$

Insbesondere sind zwei Doppelnebenklassen entweder gleich oder disjunkt. Wir schreiben

$$H\backslash G/K$$

für die Menge aller Doppelnebenklassen.

Jetzt können wir Tits-Systeme definieren.

Definition 5.2 *Es sei G eine Gruppe, $B, N \subset G$ seien Untergruppen und $S \subset N$ eine Teilmenge. Dann heißt (G, B, N, S) Tits-System, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(T1) *G wird von $B \cup N$ erzeugt und $T := B \cap N$ ist ein Normalteiler in N.*

(T2) *Für die Gruppe $W = N/T$ gilt: Die Nebenklassen sT für $s \in S$ erzeugen W und haben die Ordnung 2.*

(T3) *Für alle $s \in S$ und $n \in N$ ist*

$$BnBsB \subset BnB \cup BnsB$$

(T4) *Für alle $s \in S$ ist $sBs^{-1} \neq B$.*

Manchmal wird ein Tits-System auch Gruppe mit $BN-$Paar genannt.

Beispiel : Sei $G = GL_n(K)$ für einen beliebigen Körper K. Ferner sei $B \subset G$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen und $N \subset G$ die Normalisatorgruppe der Untergruppe T der Diagonalmatrizen. Dann besteht N genau aus den invertierbaren Monomialmatrizen, das heißt, den invertierbaren Matrizen, die in jeder Zeile und Spalte genau einen Eintrag $\neq 0$ besitzen. Nach Konstruktion ist $T = B \cap N$ ein Normalteiler in N. Durch Anwenden elementarer Zeilenoperationen auf eine Matrix kann man ferner zeigen, dass G von $B \cup N$ erzeugt wird. Also gilt (T1).

$W = N/T$ ist hier isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n. Wir wählen $S \subset N$ so, dass die Menge der sT genau der Menge der Transpositionen $\{\tau_{12}, \ldots, \tau_{n-1\ n}\}$ entspricht. Dann gilt (T2) und (T4). Die Eigenschaft (T3) zeigen wir hier nur für das Beispiel $G = GL_2(K)$. Dann ist

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \neq 0 \right\}$$

und $W = N/T = S_2 \simeq \{\pm 1\}$.

Da $BnB = BntB$ für jedes $t \in T$ gilt, muss man (T3) nur für ein Vertretersystem der Restklassen in $W = N/T$ überprüfen. Ist $n = 1$, so gilt

$$BnBsB = BsB$$

und es ist nichts zu zeigen. Ist $n = s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, so ist

$$nBs = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: B_-$$

die Gruppe der unteren Dreiecksmatrizen. Wir müssen $B_- \subset BsB \cup B$ zeigen. Sei also eine untere Dreiecksmatrix $g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \in B_-$ gegeben.

Ist $c = 0$, so ist $g \in B$. Ist $c \neq 0$, so gilt

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{c} \\ 0 & -\frac{ab}{c} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{c} \\ 0 & -\frac{ab}{c} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} = g, \end{aligned}$$

also ist $g \in BsB$.

Im folgenden sei (G, B, N, S) ein Tits System. Für $w \in W$ setzen wir

$$C(w) = BwB,$$

wobei wir definieren: $BwB = BnB$ für jeden beliebigen Vertreter n der Restklasse $w \in W = N/T$.

Dann ist $C(1) = B$ und $C(w^{-1}) = C(w)^{-1}$ sowie $C(w_1 w_2) \subset C(w_1)C(w_2)$, wobei wir für Teilmengen M_1, M_2 von G immer $M_1^{-1} = \{g^{-1} : g \in M_1\}$ und $M_1 M_2 = \{m_1 m_2 : m_1 \in M_i\}$ setzen. Axiom (T3) lässt sich dann ausdrücken als

$$C(n)C(s) \subset C(n) \cup C(ns).$$

Das Produkt $C(n)C(s)$ ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Elementen aus B von rechts und von links. Es ist also disjunkte Vereinigung von Doppelnebenklassen aus $B\backslash G/B$. Offenbar ist die Doppelnebenklasse

$$C(ns) = BnsB \text{ in } C(n)C(s) = BnBsB$$

enthalten. Mit Hilfe von (T3) gilt also

$$C(n)C(s) = \begin{cases} C(n) \cup C(ns) & \text{falls } C(n) \subset C(n)C(s) \\ C(ns) & \text{falls } C(n) \not\subset C(n)C(s). \end{cases}$$

Für $n = s$ ist $C(n)C(s) = BsBsB$. Nach (T4) ist $sBs \neq B$, also folgt $C(s)C(s) \neq C(s^2) = C(1) = B$. Daher muss hier der erste Fall eintreten, das heißt, es gilt

$$\begin{aligned} C(s)C(s) &= C(s) \cup C(1). \\ &= BsB \cup B. \\ &=: P_s. \end{aligned}$$

Lemma 5.3 *Für jedes $s \in S$ ist P_s eine Untergruppe von G, die B enthält. Jede solche Untergruppe nennen wir eine Parabolische in G.*

Beweis : Da $1 \in B \subset P_s$ ist, müssen wir nur die Abgeschlossenheit unter Multiplikation und Inversenbildung zeigen. Seien $g, h \in P_s$. Ist eines dieser Elemente in B, dann folgt sofort $g \cdot h \in P_s$. Sind g und h aus BsB, dann ist $gh \in BsBsB = C(s)C(s) = P_s$.

Ist $g \in B$, so liegt $g^{-1} \in B$. Ist $g \in BsB$, so liegt $g^{-1} \in Bs^{-1}B = BsB$. □

Aus $C(s)C(s) = C(s) \cup C(1)$ folgt für jedes $n \in N$

$$\begin{aligned} C(n)C(s)C(s) &\subset C(n)C(s) \cup C(n)C(1) \\ &= C(n)C(s) \cup C(n). \end{aligned}$$

Lemma 5.4 *Sei (G, B, N, S) ein Tits System und $w \in W$ sowie $s_1, \ldots, s_q \in S$. Dann gilt*

$$C(w)C(s_1 \cdot \ldots \cdot s_q) \subset \bigcup_{\substack{i_1 < i_2 < \ldots i_p \leqq q, \\ 1 \leqq p \leqq q}} C(ws_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_p})$$

Beweis : mit Induktion nach q. Für $q = 1$ ist dies das Axiom (T3). Angenommen, die Behauptung gilt für q. Dann ist

$$\begin{aligned}
&C(w)C(s_1 \cdot \ldots \cdot s_{q+1}) = C(w)C\big((s_1 \cdot \ldots \cdot s_q) \cdot s_{q+1}\big) \\
&\subset C(w)C(s_1 \ldots s_q)C(s_{q+1}) \\
&\overset{I,V.}{\subset} \bigcup_{\substack{i_1<\ldots<i_p\leqq q,\\ 1\leqq p\leqq q}} C(ws_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_p})C(s_{q+1}) \\
&\overset{(T3)}{=} \bigcup_{\substack{i_1<\ldots<i_p\leqq q\\ 1\leqq p\leqq q}} \big(C(ws_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_p}) \cup C(ws_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_p} \cdot s_{q+1})\big) \\
&= \bigcup_{\substack{i_1<\ldots<i_p\leqq q+1\\ 1\leqq p\leqq q+1}} C(ws_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_p}).
\end{aligned}$$

□

Satz 5.5 ***(Bruhat-Zerlegung)***

Sei (G, N, T, S) ein Tits System. Dann ist G die disjunkte Vereinigung

$$\begin{aligned}
G &= \dot{\bigcup_{w\in W}} C(w) \\
&= \dot{\bigcup_{w\in W}} BwB
\end{aligned}$$

Beweis : Wir zeigen zunächst, dass für verschiedene $v, w \in W$ die Doppelnebenklassen $C(w)$ und $C(v)$ disjunkt sind.

Wir können $l_S(w) \geqq l_S(v) = q \geqq 0$ annehmen, wobei die Längenfunktion bezüglich des Erzeugendensystems wie in Definition 2.7 definiert ist.

Für $q = 0$ ist $v = 1$. Also ist $w \neq 1$. Sei $n \in N$ ein Vertreter von w. Falls $C(w) \cap C(1) = BnB \cap B \neq \emptyset$ ist, so folgt $n \in B$, also $n \in B \cap N = T$ nach (T1). Dann ist aber $w = 1$. Also sind $C(w)$ und $C(1)$ disjunkt für $w \neq 1$. Mit Induktion nach q können wir annehmen, dass $C(w) \cap C(v) = \emptyset$ ist für $l_S(w) \geqq l_S(v) = q - 1$. Wir betrachten nun $w \neq v$ mit $l_S(w) \geqq l_S(v) = q$ und wählen ein $s \in S$ mit $l_S(vs) = q - 1$. Dann ist $w \neq vs$ und $vs \neq ws$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt also $C(w) \cap C(vs) = \emptyset$ und $C(ws) \cap C(vs) = \emptyset$. Aus $C(w) = C(v)$ würde also folgen

$$\begin{aligned}
C(vs) &\subset C(v)C(s) \\
&= C(w)C(s) \\
&\overset{(T3)}{\subset} C(w) \cup C(ws),
\end{aligned}$$

was im Widerspruch zu $C(vs) \cap C(w) = \emptyset$ und $C(vs) \cap C(ws) = \emptyset$ steht. Also sind die Doppelnebenklassen $C(w)$ und $C(v)$ disjunkt.

Nun setzen wir

$$X = \bigcup_{w \in W} C(w) \subset G$$

Es bleibt zu zeigen, dass $X = G$ ist. Nach Lemma 5.4 ist X abgeschlossen unter Multiplikation. Ferner enthält X die Untergruppe $B = C(1)$ sowie N. Da B und N nach (T1) die Gruppe G erzeugen, folgt $X = G$. □

Lemma 5.6 *Sei (G, B, N, S) ein Tits System. Für $w \in W$ und $s \in S$ mit*

$$l_S(sw) \geqq l_S(w)$$

gilt dann

$$C(s)C(w) = C(sw).$$

Beweis : mit Induktion nach $q = l_S(w)$. Ist $q = 0$, so folgt $w = 1$ und unsere Behauptung stimmt, da

$$C(s)C(1) = C(s)B = C(s)$$

ist.

Also nehmen wir an, die Behauptung gilt für alle Elemente der Länge q. Sei $w \in W$ mit $l_S(w) = q + 1$ und $l_S(sw) \geqq l_S(w) = q + 1$.

Dann schreiben wir $w = vs'$ mit einem $v \in W$ der Länge $l_S(v) = q$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\begin{aligned} & C(v)C(s') \\ = \ & C(v^{-1})^{-1}C(s'^{-1})^{-1} \\ = \ & \big(C(s'^{-1})C(v^{-1})\big)^{-1} \\ \overset{I.V.}{=} \ & C(s'^{-1}v^{-1})^{-1} \\ = \ & C(vs'). \end{aligned}$$

Aus $l_S(sw) \geqq l_S(w)$ folgt $l_S(sv) \geqq l_S(v) = q$, also ergibt sich aus der Induktionsvoraussetzung auch

$$C(s)C(v) = C(sv).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} C(s)C(w) = C(s)C(vs') &= C(s)C(v)C(s') \\ &= C(sv)C(s'). \end{aligned}$$

Nach (T3) ist

$$\begin{aligned} C(sv)C(s') &\subset C(sv) \cup C(svs') \\ &= C(sv) \cup C(sw) \end{aligned}$$

und somit
$$C(s)C(w) \subset C(sv) \cup C(sw).$$
Axiom (T3) liefert ferner
$$C(w^{-1})C(s^{-1}) \subset C(w^{-1}) \cup C(w^{-1}s^{-1}),$$
also nach Invertieren
$$C(s)C(w) \subset C(w) \cup C(sw).$$
Unsere Behauptung $C(s)C(w) = C(sw)$ folgt also, wenn wir zeigen können, dass
$$C(s)C(w) \cap C(w) = \emptyset$$
ist. Angenommen $g \in C(s)C(w) \cap C(w)$. Dann folgt
$$g \in C(sv) \text{ oder } g \in C(sw).$$
Nach Satz 5.5 sind für verschiedene Elemente aus W die Doppelnebenklassen $C(-)$ disjunkt. Also folgt $sv = w$ oder $sw = w$. Beides ist unmöglich, denn aus $sv = w$ folgte $v = s^2v = sw$ im Widerspruch zu $l_S(sw) \geqq q+1$, und aus $sw = w$ folgte $s = 1$.

Also gilt in der Tat $C(s)C(w) = C(sw)$. □

Satz 5.7 *Sei (G, B, N, S) ein Tits System mit $W = N/T$. Dann ist (W, S) ein Coxetersystem.*

Beweis : Wir zeigen die Austauschbedingung (E). Sei $w = s_1 \cdot \ldots \cdot s_q$ mit $l_S(w) = q$ und $s \in S$ mit $l(sw) \leqq l_S(w) = q$.

Dann ist zu zeigen, dass es ein $\mu \leqq q$ gibt mit
$$w = s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \mu}}^{q} S_i.$$
Nun ist $l_S\big(s(sw)\big) = l_S(w) = q \geqq l_S(sw)$, also können wir Lemma 5.6 anwenden und folgern
$$C(s)C(sw) = C(w).$$
Daraus ergibt sich mit $C(s)C(s) = C(1) \cup C(s)$:
$$C(s)C(w) = C(s)C(s)C(sw) = \big(C(1) \cup C(s)\big)C(sw) = C(sw) \cup C(w).$$
Also ist $C(s)C(w) \cap C(w) \neq \emptyset$, woraus $sBw \cap BwB \neq \emptyset$ folgt.

Daher ist
$$sB \cap BwBw^{-1} \neq \emptyset,$$

also auch

$$BsB \cap BwBw^{-1}B \neq \emptyset.$$

Die Teilmenge $BwBw^{-1}B = C(w)C(w^{-1})$ ist also eine Vereinigung von Doppelnebenklassen, die $BsB = C(s)$ enthält. Nach Lemma 5.4 gilt

$$\begin{aligned} & C(w)C(w^{-1}) \\ = \; & C(w)C(s_q \cdot \ldots \cdot s_1) \\ \subset \; & \bigcup_{\substack{i_1<\ldots<i_p\leqq q \\ 1\leqq p\leqq q}} C(ws_{i_p} \cdot \ldots \cdot s_{i_1}). \end{aligned}$$

Also ist $C(s)$ eine dieser Doppelnebenklassen:

$$C(s) = C(ws_{i_p} \cdot \ldots \cdot s_{i_1}),$$

woraus mit Satz 5.5

$$\begin{aligned} s &= ws_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_p}, \\ \text{also } w &= s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_p} \text{ folgt.} \end{aligned}$$

Wegen $l_S(w) = q$ ist $p \geqq q - 1$. Da $w \neq ss_1 \cdot \ldots \cdot s_q = sw$ ist, folgt $p = q - 1$ und damit unsere Behauptung. □

Satz 5.8 *Sei (G, B, N, S) ein Tits-System. Für $R \subset S$ sei W_R die von allen rT für $r \in R$ erzeugte Untergruppe von W. Dann ist*

$$P_R = \bigcup_{w\in W_R} C(w)$$

eine Untergruppe von G. Es gilt

$$R \subset R' \Leftrightarrow P_R \subset P_{R'}.$$

Beweis : Aus Lemma 5.4 folgt, dass P_R abgeschlossen unter der Multiplikation ist. Ferner ist $1 \in B = C(1) \subset P_R$, und wegen $C(w)^{-1} = C(w)$ ist P_R auch abgeschlossen unter Inversenbildung. Also ist P_R eine Untergruppe von G. Offenbar folgt aus $R \subset R'$, dass $P_R \subset P_{R'}$ gilt. Ist umgekehrt $P_R \subset P_{R'}$, so folgt aus Satz 5.5 $W_R \subset W_{R'}$. Da nach Satz 5.7 W eine Coxetergruppe ist, können wir mit Korollar 3.3 $R \subset R'$ schließen. □

Die Untergruppen $P_R \subset G$ heißen standard Parabolische von G. Für $R = \{s\}$ ist $P_R = P_s$.

Korollar 5.9 *Für $R \subset S$ ist (P_R, B, N_R, R) ein Tits System, wobei $N_R \subset N$ das Urbild von W_R unter der Quotientenabbildung $N \to W = N/T$ ist.*

Beweis : Nach Definition von P_R ist P_R von N_R und B erzeugt und $B \cap N_R = (B \cap N) \cap N_R$ ist ein Normalteiler in N_R. Daher gilt (T1). (T2) ist erfüllt, da W_R von allen rT für $r \in R$ erzeugt ist. Die Eigenschaften (T3) und (T 4) vererben sich von G auf P_R. □

Proposition 5.10 *Für $R, R' \subset S$ und $w \in W$ gilt*

$$P_R w P_{R'} = B W_R w W_{R'} B.$$

Beweis : Die Inklusion „ $\supset$ “ ist klar. Um „ $\subset$ “ zu zeigen, betrachten wir $s_1, \ldots, s_p \in R$ und $s'_1, \ldots, s'_q \in R'$. Dann ist

$$C(s_1 \cdot \ldots \cdot s_p) C(w) C(s'_1 \cdot \ldots \cdot s'_q)$$

nach Lemma 5.4 die Vereinigung von Doppelnebenklassen der Form

$$C(vwv')$$

für $v \in W_R$ und $v' \in W_R$.

Jede solche Doppelnebenklasse ist in $BW_R w W_{R'} B$ enthalten. $\square$

Satz 5.11 ***(Gebäude zu einem Tits System)***

Sei (G, B, N, S) ein Tits System. Wir betrachten die Menge

$$\triangle = \triangle(G, B, N, S) = \bigcup_{R \subset S} G/P_R$$

aller Nebenklassen von G nach einer der standard Parabolischen P_R. Wir versehen $\triangle$ mit der partiellen Ordnung

$$gP_R \leqq g' P_{R'} \Leftrightarrow g' P_{R'} \subset g P_R,$$

die durch die Umkehrung der Inklusion gegeben ist. Ferner definieren wir eine Typabbildung

$$t : \triangle \to \mathcal{P}(S)$$

durch $t(gP_R) = S \backslash R$.

Wir definieren ferner eine Abbildung

$$\varphi : \Sigma(W, S) \to \triangle$$

durch

$$wW_R \mapsto wP_R,$$

wobei $\Sigma(W, S)$ den Coxeterkomplex zum Coxetersystem (W, S) bezeichnet. Dann vermittelt φ einen typerhaltenden Isomorphismus auf einen Unterkomplex von $\triangle$. Wir setzen $\Sigma_0 =$ Bild(φ) und

$$\mathcal{A} = \{g(\Sigma_0) : g \in G\}.$$

Dann ist $\triangle$ ein dickes Gebäude vom Typ (W, S) mit Apartmentsystem $\mathcal{A}$, auf dem die Gruppe G durch simpliziale Isomorphismen operiert.

Beweis : Wir betrachten die Abbildung $\varphi : \Sigma(W,S) \to \triangle$ mit $\varphi(wW_R) = wP_R$. Aus $wP_R \subset w'P_{R'}$ und Satz 5.8 folgt, dass

$$w'^{-1}w \in P_{R'} \text{ und } R \subset R'$$

gilt. Also ist $w'^{-1}w \in P_{R'} \cap W$. Nach Definition von $P_{R'}$ existiert ein $v \in W_{R'}$ mit $w'^{-1}w \in C(v)$. Mit Satz 5.5 folgt daraus $w'^{-1}w = v \in W_{R'}$. Also ist $wW_R \subset w'W_{R'}$. Insbesondere ist φ injektiv und φ sowie die Umkehrabbildung auf Bild (φ) sind ordnungserhaltend. Definitionsgemäß ist φ typerhaltend und damit dimensionserhaltend. $\Sigma_0 = \varphi\big(\Sigma(W,S)\big)$ ist ein Unterkomplex von $\triangle$, denn aus

$$g'P_{R'} \leqq wP_R \in \Sigma_0$$

folgt $wP_R \subset g'P_{R'}$, also $g'^{-1}w \in P_{R'}$ und $R \subset R'$. Daher ist auch $g'P_{R'} = wP_{R'} \in \Sigma_0$. Also ist φ ein Isomorphismus über S

$$\Sigma(W,S) \xrightarrow{\sim} \Sigma_0.$$

Für jedes $h \in G$ haben wir einen natürlichen Isomorphismus über S

$$\begin{aligned} h : \triangle &\to \triangle \\ gP_R &\mapsto hgP_R. \end{aligned}$$

Daher sind auch alle Unterkomplexe $g(\Sigma_0)$ über S isomorph zu $\Sigma(W,S)$, und es gilt Axiom $(B1)$ aus Definition 4.2.

Wir zeigen nun Axiom (B2). Angenommen, a und b sind in den beiden Apartments $h_1(\Sigma_0)$ und $h(\Sigma_0)$ für $h_1, h \in G$ enthalten. Wir suchen einen Isomorphismus

$$\varphi : h_1(\Sigma_0) \to h(\Sigma_0)$$

über S, der a und b festlässt. Indem wir den Isomorphismus

$$h_1^{-1} : \triangle \to \triangle$$

auf $a, b, h_1(\Sigma_0)$ und $h(\Sigma_0)$ anwenden, können wir $h_1 = 1$ annehmen. Die Simplizes a und b sind als Elemente von Σ_0 von der Form

$$a = n_1 P_{R_1} \text{ und } b = n_2 P_{R_2}$$

für $n_1, n_2 \in N$ und $R_1, R_2 \subset S$.

Aus $a \in h(\Sigma_0)$ folgt $a = hm_1P_{R_1}$ für ein $m_1 \in N$ (h ist typerhaltend). Nun ist

$$\begin{aligned} m_1 : \Sigma_0 &\to \Sigma_0 \\ nW_R &\mapsto m_1 nW_R \end{aligned}$$

ein Isomorphismus, also ist $h(\Sigma_0) = hm_1(\Sigma_0)$, und wir können $m_1 = 1$ annehmen, indem wir h durch hm_1 ersetzen. Daher ist

$$a = n_1 P_{R_1} = hP_{R_1},$$

also $n_1^{-1}h \in P_{R_1}$. Aus $b \in h(\Sigma_0)$ folgt $b = hm_2P_{R_2}$, und somit

$$n_2 P_{R_2} = hm_2 P_{R_2}$$

für ein $m_2 \in N$, woraus $n_1^{-1}n_2P_{R_2} = (n_1^{-1}h)m_2P_{R_2} \in P_{R_1}m_2P_{R_2}$ und daher $n_1^{-1}n_2 \in P_{R_1}m_2P_{R_2}$ folgt. Nach Proposition 5.10 gilt

$$P_{R_1}m_2P_{R_2} = BW_{R_1}m_2W_{R_2}B,$$

also existieren $w_1 \in W_{R_1}, w_2 \in W_{R_2}$ mit

$$n_1^{-1}n_2 \in Bw_1m_2w_2B.$$

Aus der Bruhat-Zerlegung Satz 5.5 folgt daraus

$$\overline{n_1^{-1}n_2} = w_1\overline{m_2}w_2 \text{ in } W$$

wobei $n \mapsto \overline{n}$ die Quotientenabbildung $N \to T$ bezeichnet.

Daher existiert ein $m \in N_{R_1}$, so dass

$$m^{-1}n_1^{-1}n_2 \in m_2BW_{R_2}$$

gilt, woraus

$$m^{-1}n_1^{-1}n_2 \in m_2P_{R_2}$$

folgt. Nun betrachten wir den Isomorphismus

$$h \circ m^{-1} \circ n_1^{-1} : \Sigma_0 \to h(\Sigma_0).$$

Es gilt einerseits

$$\begin{aligned} h \circ m^{-1} \circ n_1^{-1}(a) &= h \circ m^{-1} \circ n_1^{-1}(n_1P_{R_1}) \\ &= h \circ m^{-1}P_{R_1} \\ &\overset{m\in P_{R_1}}{=} hP_{R_1} \\ &= a \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} h \circ m^{-1} \circ n_1^{-1}(b) &= h \circ m^{-1} \circ n_1^{-1}(n_2P_{R_2}) \\ &= h \circ (m^{-1} \circ n_1^{-1} \circ n_2)P_{R_2} \\ &= h\ m_2\ P_{R_2} \\ &= b, \end{aligned}$$

dieser Isomorphismus leistet also das Verlangte.

Es bleibt das Axiom (B3) zu zeigen. Dazu betrachten wir Elemente

$$a_1 = g_1P_{R_1} \text{ und } a_2 = gP_{R_2}$$

in $\triangle$. Wir zeigen, dass a_1 und a_2 in einem gemeinsamen Apartment liegen. Dazu können wir wie im Beweis von (B2) $g_1 = 1$ annehmen.

Mit Hilfe der Bruhat-Zerlegung Satz 5.5 ist

$$g = bnb'$$

für $b, b' \in B$ und $n \in N$.

Also folgt
$$a_2 = gP_{R_2} \overset{B \subset P_{R_2}}{=} b_n P_{R_2}.$$
Also ist $b^{-1}(a_2) \in \Sigma_0$, das heißt, $a_2 \in b(\Sigma_0)$.

Außerdem gilt
$$b^{-1}a_1 = b^{-1}P_{R_1} = P_{R_1},$$
daher ist auch $a_1 \in b(\Sigma_0)$.

Dies ist also das gesuchte Apartment. $\square$

Wir wollen nun das Beispiel
$$G = GL_n(K)$$
näher betrachten. Hier ist

$B =$ Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen,
$N =$ Gruppe der Monomialmatrizen,

$W = N/T \simeq \mathcal{S}_n$ und $S = \{\tau_{12}, \ldots, \tau_{n-1,n}\}$ das Erzeugendensystem von W zu den $(n-1)$ sukzessiven Transpositionen.

Satz 5.11 liefert ein Gebäude $\triangle$ zum Tits-System (G, B, N, S), dessen Simplizes von der Form
$$g\ P_R$$
für $g \in G$ und $R \subset S$ sind. Wir identifizieren Elemente in W mit den zugehörigen Monomialmatrizen. Sei
$$F_0 : (0) \subset \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \ldots \subset \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle \subset V$$
die Standardflagge in K^n.

Offenbar ist B =Stab(F_0) der Stabilisator der Flagge F_0 unter der Operation von $GL_n(K)$ auf K^n.

Es sei $R \subset S$. Wir schreiben R als Vereinigung von „zusammenhängenden Stücken“:
$$\begin{array}{rcl} R & = & \{\tau_{i_1,i_1+1}, \tau_{i_1+1,i_1+2}, \ldots, \tau_{i_1+k_1-1,i_1+k_1}\} \\ & \cup & \{\tau_{i_2,i_2+1}, \tau_{i_2+1,i_2+2}, \ldots, \tau_{i_2+k_2-1,i_2+k_2}\} \\ & \ldots & \\ & \cup & \{\tau_{i_r,i_r+1}, \tau_{i_r+1,i_r+2}, \ldots, \tau_{i_r+k_r-1,i_r+k_r}\} \end{array}$$
wobei $i_2 > i_1 + k_1, i_3 > i_2 + k_2, \ldots, i_r > i_{r-1} + k_{r-1}$ sind.

F_R sei die Flagge aus allen
$$\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$$

für $1 \leqq k < i_1, i_1 + k_1, \ldots, i_2 - 1, i_2 + k_2, \ldots, i_r - 1, i_r + k_r, i_r + k_r + 1, \ldots, i_n$.

Wir nehmen also für alle Indizes

$$k \in [i_1, \ldots, i_1 + k_1 - 1] \cup [i_2, \ldots, i_2 + k_2 - 1] \\ \cup \ldots \cup [i_r, \ldots, i_r + k_r - 1]$$

den Vektorraum $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ aus F_0 heraus.

Lemma 5.12 *Es ist $P_R = Stab\ F_R$.*

Beweis : Das kann man mit der Bruhatzerlegung für $GL_n(K)$ auf den einzelnen Stücken zeigen. $\square$

Die Standardparabolischen sind also genau die Stabilisatoren von Unterflaggen von F.

Beispiel: $n = 4$. Hier ist $S = \{\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{34}\}$. Für $R = \{\tau_{12}\}$ ist

$$P_R = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Für $R = \{\tau_{12}, \tau_{23}\}$ ist

$$P_R = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Für $\tau = \{\tau_{12}, \tau_{34}\}$ ist

$$P_R = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Nun definieren wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \triangle &\rightarrow \{\text{Flaggen in } K^n\} \\ gP_R &\mapsto g(F_R). \end{aligned}$$

Diese erhält die partielle Ordnung, denn aus $gP_R \leqq g'P_{R'}$ folgt $g'P_{R'} \subset gP_R$, also $R' \subset R$ und $g^{-1}g' \in P_R$. Daher ist $F_R \subset F_{R'}$, also

$$\begin{aligned} gF_R &= g(g^{-1}g')(F_R) \\ &= g'F_R \\ &\subset g'F_{R'}. \end{aligned}$$

Φ ist injektiv, denn aus $g_1(F_R) = g_2(F_{R'})$ folgt $g_2^{-1}g_1(F_R) = F_{R'}$. Nach der Bruhat-Zerlegung Satz 5.5 gilt für $g = g_2^{-1}g_1$:

$$g = bnb'$$

mit $b, b' \in B$. Da B alle Unterflaggen von F_0 stabilisiert, folgt $nF_R = F_{R'}$. Daraus folgt induktiv $R = R'$ und $n \in$ Stab $(F_R) = P_R$. Also ist $g = bnb' \in P_R$, woraus

$$g_1F_R = g_2F_R = g_2F_{R'}$$

folgt.

Φ ist offenbar auch surjektiv, da man jede beliebige Flagge in K^n als gF_R für geeignetes $g \in GL_n(K)$ und $R \subset S$ schreiben kann. Die Abbildung Φ ist ein Isomorphismus von Simplizialkomplexen. Damit sehen wir, dass der Flaggenkomplex $\triangle(K^n)$ ein Gebäude ist.