KLAUSUR für das Staatsexamen Mathematik L2/L5

Frühjahr 2018

Bitte nehmen Sie für jede Aufgabe gesonderte Blätter. Schreiben Sie Ihren Namen leserlich auf jedes benutzte Blatt, nummerieren Sie die Blätter sinnvoll, und lassen Sie an beiden Seiten Ränder zum Abheften bzw. für die Korrektur. Bedenken Sie bitte, dass Ihre Darstellungs- und Ausdrucksweise mitbewertet wird. Längere Texte sind nicht unbedingt besser!
Es werden nur zwei c-Teile gewertet; bearbeiten Sie nicht unnötig mehr als zwei.

Aufgabe 1 (Elementarmathematik)

$(a_n)_{n\in N}$ sei die Folge natürlicher Zahlen

$$1 \quad 1 \quad 3 \quad 7 \quad 17 \quad 41 \quad 99 \quad 239 \quad 577 \quad . . . ,$$

rekursiv definiert durch

$$a_1 = a_2 := 1, \qquad a_{n+1} := 2a_n + a_{n-1} \text{ für alle } n>1.$$

a) Beweisen Sie $2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + a_n^2) = a_{n+1}a_n + 1$ für alle $n \in N$.
b) Beweisen Sie $a_n < 3^n$ für alle n und $a_n > 2^n$ für alle $n \geq 9$.
c) Verwenden Sie $a_n < 3^n$, um die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$x + x^2 + 3x^3 + 7x^4 + \ . \ . \ . = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

für alle reellen x mit $|x| < \frac{1}{4}$ zu zeigen. Warum konvergiert die Reihe gegen

$$\frac{x-x^2}{1-2x-x^2}\ ?$$

Aufgabe 2 (Didaktik: Vierecke – Lokales Ordnen)

a) Beschreiben Sie in geeigneter Weise (z.B. durch das Haus der Vierecke) die Beziehung zwischen den in der Sekundarstufe behandelten Vierecke.

b) Das Trapez ist ein besonderes Viereck. Leiten Sie auf drei verschiedene Arten die Flächeninhaltsformel für das Trapez her.

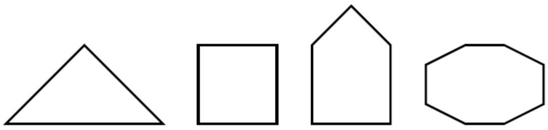
c) Stellen Sie am Beispiel des Trapezes die Stufen des Begriffsverständnisses nach Vollrath dar.

Aufgabe 3 (Elementare Analysis)

a) Sei $(a_n)_{n\in N}$ eine gegen $a\in$ R konvergente Folge in den reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(b_n)_{n\in N}$, gegeben durch $b_n = \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$ in den reellen Zahlen konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

b) Finden Sie eine nicht konvergente Folge $(a_n)_{n\in N}$, so dass die zugehörige Folge $(b_n)_{n\in N}$ aus Teil a) konvergiert.

c) Sei $n\geq 3$ eine natürliche Zahl und P_n ein Polygon mit n Ecken und n Kanten (ein n-Eck). Beispiele für P_n, n = 3, 4, 5, 6 finden Sie unter der Aufgabenstellung. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n\in N$, $n\geq 3$ die Winkelsumme in P_n gerade $((n-2)\cdot 180)°$ beträgt.



P_3 P_4 P_5 P_6

Aufgabe 4 (Geometrie)

Auf der Erde wird der Wendekreis nördlicher Breite auch "Wendekreis des Krebses" genannt und liegt ungefähr 23 Grad über dem Äquator. In diesem Wendekreis stellen wir uns nun die Grundfläche □A, B, C, D einer Pyramide vor, deren Spitze N im Nordpol liegt. Der Einfachheit halber betrachten wir das in folgendem Modell. Sei S^2 die Einheitssphäre im R^3. Betrachten Sie die in S^2 liegende Pyramide mit der Spitze N = (0, 0, 1) und der Grundfläche mit den Ecken

$$A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), B = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), C = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) und\ D = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

a) Berechnen Sie die sphärischen Koordinaten der Punkte N, A, B, C und D.

b) Sei von nun an die Höhe des Wendekreises $t \in (0, 1)$ variabel, das heißt betrachten Sie die Punkte $A(t) = \left(\sqrt{1-t^2}, 0, t\right)$ und $B(t) = \left(0, \sqrt{1-t^2}, t\right)$. Bestimmen Sie den sphärischen Winkel α am Punkt A(t) im Dreieck *A(t), B(t), N*. Zeigen sie dazu $\cos\alpha = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. Berechnen Sie außerdem den Flächeninhalt des Dreieckes für $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Beschreiben Sie die Menge aller Isometrien $R^3 \to R^3$, welche die eingebettete Pyramide mit Grundfläche □ A, B, C, D und Spitze N invariant lassen. Entscheiden Sie, ob es sich dabei um eine Gruppe handelt.

Aufgabe 5 (Stochastik)

Ein Kartenspiel mit 2n Karten enthält n rote und n schwarze Karten. Wir stellen uns vor, dass das Blatt perfekt gemischt ist (also jede Reihenfolge gleich wahrscheinlich ist) und die Karten der Reihe nach aufgedeckt werden. Dabei wechseln deren Farben hin und her zwischen rot und schwarz.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es schon beim Aufdecken der zweiten Karte zu einem Farbwechsel kommt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es nur einen einzigen Farbwechsel gibt.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass es von der k-ten zur $(k+1)$-ten aufgedeckten Karte zu einem Farbwechsel kommt, ist gleich der unter (a) berechneten Wahrscheinlichkeit (für $k = 1$). Geben Sie für diese Aussage ein Argument und nutzen Sie sie, um den Erwartungswert $E(X)$ der Anzahl X aller Farbwechsel zu bestimmen.